PAULLI FRISII

MEDIOLANENSIS
CONGR. D. PAULLI CLER. REG.
IN PISANO GYMNASIO PUBLICI PROFESSORIS,
SOCIETATIS LONDINENSIS, BONONIENSIS INSTITUTI,
ET PETROPOLITANÆ, AC BEROLINENSIS
SCIENTIARUM ACADEMIÆ SOCII

DISSERTATIONUM VARIARUM

Tomus Secundus,

IN QUO HABENTUR

1. De inæqualitatibus motus Planetarum omnium in orbitis circularibus, atque ellipticis Libri duo.
2. De methodo Fluxionum Geometricarum, & ejus usu in investigandis præcipuis curvarum affectionibus Dissertatio.
3. Meditationes quædam Metaphysicæ.

LUCÆ MDCCLXI.

Apud Vincentium Junctinium.

Cum Approbatione.

SUMPTIBUS JOANNIS RICCOMINI.

AUGUSTINO
LAUMELLINO
JANUENSIS REIPUBLICÆ DUCI
&c. &c. &c.

PAULLUS FRISIUS

FELICITATEM.

UT meas hasce dissertationes inscriptas Tibi, ac dedicatas velim, SERENISSIME

Princeps, non ſummi Principatus inſignia, non aviti generis ſplendor, non rerum domi, foriſque præclare geſtarum gloria, ſed ipſa facit ſcientia, qua excellis, diſciplinarum Mathematicarum. Graviſſima quidem munera, & Legationes illæ, quas in maxima temporum difficultate Patriæ nomine obiiſti, & Magiſtratus omnes, quibus integerrime defunctus es, Te Tuis Civibus apprime charum ad honorem Regium, quem tenes, evexerunt. Civilium vero, & politicarum virtutum laude apud exteras quoque nationes, viroſque Principes, ac Reges potentiſſi-

mos

mos ſic præſtitiſti, ut in pretio, & admiratione omnibus fueris. At acerrimi ingenii vis illa Tua, & facultatum abſtruſiſſimarum cognitio, Te adeo celebrioribus ætatis noſtræ Philoſophis approbarunt, commendaruntque, ut cum ab omni aſſentationis genere abhorreant, atque hominum merita non ex originis nobilitate, aut ex ſubſidio divitiarum, ſed ex virtute metiri ſoleant, tamen & Tibi ſint addictiſſimi, & Te unum ex ipſis præcipuo loco ſuſpiciant. Cum enim ab ineunte ætate Poëſim, & amœniores litteras non ſine nominis celebritate excolueris,

poſtmodum ad altiora contendens Piſano otio, & vacatione a publicis muneribus Lutetiæ Pariſiorum ſic profeciſti, ut ſummis Geometris in inveſtigatione rerum abditiſſimarum comes lateri ſemper hæreres. Quibus quidem in ſtudiis quos ipſe progreſſus feceris, & illi plane ſenſerunt, & ego etiam per me, quem non ultimo habes loco inter Tuos, haud ægre potui intelligere, cum & Januæ, & Florentiæ ad Te familiariter accedentem benigne excipiens de calculis, & æquationibus ſermones inter epulas etiam graviſſimos ferebas. Quarum rerum ſuaviſſima

recor-

recordatio cum nunquam ſit in animo meo interitura, tum facit modo ut hanc libentiſſime arripiam mihi præſtitam occaſionem grati animi ſenſus ſignificandi. Tibi etiam hoc alterum volumen mearum diſſertationum, in quo potiſſimum de inæqualitatibus cæleſtium corporum, de æquationibus mediorum motuum, de viciſſitudinibus velocitatis, nodorum, inclinationis orbitæ ſermo eſt, peculiari ratione debere me intelligebam. Cum enim maxima Tibi ſtudiorum, officiorumque neceſſitudo intercedat cum ſummo illo, & præcipuo totius Galliæ Philoſopho, qui primus o-

mnium

mnium Problemata hæc difficillima aggreſſus eſt, quique novam theoriam Præceſſionis Æquinoctiorum, & Nutationis Terreſtris Axis ſub Tuis Auſpiciis prodire voluit; mihi facile perſuadebam nihil animo Tuo jocundius a me proficiſci poſſe, quam ſi de aliis gravitatis phænomenis, & Planetarum aberrationibus diſſererem. Tu qui de ingenii cujuſque viribus, SERENISSIME PRINCEPS, libentius judicas, quam de capite, & fortunis Civium, nec graviſſimis occupationibus ſic diſtineris ut ad alia quoque intendere non poſſis animum, ſubciſivas aliquot horas ſurripere Tibi ipſi poteris ut

per-

perſpicias ſi quid modo aut prorſus novum, aut elegantius quam antea pertractatum prodeat in amœniſſimis hiſce ſtudiis cæleſtis Phyſicæ: quod & qua polles calculorum ſubducendorum dexteritate facile continget. Ego vero felicem ſatis, fortunatumque me exiſtimaverim, ſi ſtudia hæc mea, quantulacumque ea demum ſint, in Te uno & Magnanimi Principis Patrocinium nacta fuerint, & ſummi Mathematici approbationem.

PAULLI FRISII
DE
INÆQUALITATIBUS
MOTUS
PLANETARUM OMNIUM
IN ORBITIS CIRCULARIBUS
ATQUE ELLIPTICIS

Libri Duo,

QUORUM SPECIMEN ANNO MDCCLX. PROXIME ACCESSIT
PRÆMIO REGIÆ PARISIENSIS ACADEMIÆ.

DE INÆQUALITATIBUS MOTUS PLANETARUM.

COgitavi diu mecum ipſe, & duobus fere ab hinc annis diligentius inveſtigavi utrum, & qua ratione eadem methodus, qua divinus Newtonus, & poſt Newtonum Machinius, & Walmeslejus inæqualitates motuum Lunarium facile adeo, eleganterque explicarunt, Planetarum aliorum inæqualitatibus explicandis pari felicitate aptari poſſet, ut expedita jam, atque ampliſſima haberetur Planetarii ſyſtematis tractatio, & Lunæ theoria evaderet generalis theoriæ peculiaris quidam caſus, ac veluti corollarium. Scilicet cum Lunarium Problematum ſolutiones minus obſcuras, & complicatas reddant peculiares eæ conditiones quod Planeta attrahens orbita ſua Planetæ attracti orbitam circumambiat, & diſtantiam a centro prope infinitam habeat, & ſingulis Planetæ attracti revolutionibus veluti quieſcens in dato loco orbitæ ſuæ ſpectari poſſit; tentare volui an eodem ordine, ac methodo magnum attra-

ctionum Problema casibus aliis accomodaretur, in quibus duo Planetæ infinito intervallo a se invicem non distant, & qui attrahit Planeta centro totius motus propinquior, aut remotior est quam qui attrahitur, & alteruter, aut uterque data proportione velocitatum in circulari, aut elliptica orbita movetur. In quo quidem me de iis omnibus benemereri posse existimabam, qui cum plura hujus generis problemata a Geometris celeberrimis Alembertio, atque Eulero soluta, & ad Cometarum etiam theoriam ab ingeniosissimo Clairautio traducta habeant, planiorem tamen tractationem desiderarent, qua sine tot sublimioris Geometriæ, & Algebræ præsidiis assequi posset qui sese invicem Planetæ accelerent, aut retardent, & quas gignant inclinationis orbitæ, nodorum, aliorumque mediorum motuum vicissitudines. Id quoque Parisiensis Scientiarum Academia indicare visa est, cum anno 1748 post præmium Cl. Eulero adjudicatum eamdem de inæqualitatibus Jovis & Saturni quæstionem novo oblato præmio rursus proposuit, eamque solutionem expostulavit, quæ non solum judicibus sapientissimis, aliisque qui solvendo problemati jam pares essent, sed majori insuper lectorum numero, & minore studio, ac labore accomodaretur.

Cum in hisce igitur naturæ legibus evolvendis naturæ ipsius, quæ leges tulit, simplicitatem, brevitatemque aliquo modo imitari vellem, illico animadverti supervacaneum hic esse altius repetere rem omnem, rigore Geometrico persequi, & scrupulose ad calculum revocare non minus quam si de aliquo Geometrico, aut Analytico Problemate ageretur. Sic enim habeo: problemata hujus generis non nisi approximationibus solvi posse, approximationesque in universa Astronomia, & cælesti Physica sufficere. Hæc duo ii omnes rata, atque explorata esse intelligent, qui in praxi Astronomica versati sunt, atque alias Problematum similium solutiones ad praxim redactas consulunt, in quibus cum plura occurrant de motu trium corporum in se invicem agentium generatim, & ingeniose dicta; ubi speciebus numeri substituuntur, ubi de tabulis construendis, aut peculiaribus motuum æquationibus supputandis agitur, alias præ aliis quanti-

tita-

titates negligere, aliifque approximationibus uti neceffe eft. Alembertius etiam in animadverfionibus, quas poftremæ editioni fuæ Dynamicæ adjecit, cum de coefficientibus æquationum Problematis trium corporum exhibendis differeret, adnotavit Analyfim, & Geometriam hocce in Problemate deficere, nec nifi obfervationibus folutiones poffe comprobari. Quo cum nihil plane laudis detrahatur generalibus aliis Lunarium Problematum folutionibus, tum mihi novam laudem Newtonianæ methodo, quæ cum obfervationibus adeo convenit, accedere vifum eft, novumque acceffit ftudium methodi ipfius amplificandæ, evadendique triplicem illam difficultatem, quæ fefe offert ftatim problemate a Lunaribus inæqualitatibus ad fuperiorum, inferiorumque Planetarum inæqualitates alias traducto.

Primo autem quod pertinet ad directiones virium perturbatricium minime parallelas inter fe, & finitam rationem diftantiarum, quas duo quilibet Primarii Planetæ in fe agentes a Sole habent, manifeftum eft quod cum Newtonus primum dumtaxat terminum fupputaverit illius feriei, quæ vires Solis tanto intervallo a Terra diffiti, & Lunares motus perturbantis exprimit; plures accipi debent termini feriërum aliarum, quæ exprimunt vires alias perturbatrices Planetarum duorum Primariorum. Hoc vero opus maximum, & labor eft, ut eæ inftituantur feries, quæ licet Algebricam fummam refpuant, fatis tamen pro praxi Aftronomica convergant, & quarum dumtaxat aliquot priores termini fumi poffint. Si attractricium virium expreffio, quæ prima fronte fefe offert, accipiatur, ea fimplicis fractionis habet formam, cujus denominator eft $(M - Cos.\, z)^{\frac{3}{2}}$, & quæ refolvi poteft in feriem $A + B.\,Cos.\, z + C.\,\overline{Cos.\, z}^{2} + D.\,\overline{Cos.\, z}^{3}$ &c. Quod fi de Saturno agatur, fiet $M = \frac{13}{45}$ circiter, adeoque lente admodum converget feries, quamvis aliquo modo feriem convergere neceffe fit. Eulerus in differtatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, quæ anno 1748 a Parifienfi Academia præmium retulit, *art.* 3. *num.* 26., ope Trigonometricorum theorematum pro diverfis

ſis poteſtatibus *Cos.* z ſubſtituendo coſinus angulorum multiplorum ſeriem illam ad hanc aliam redegit $A + B.Cos.\,z + C.Cos.\,2\,z + \mathcal{D}.Cos.\,3\,z$. &c. tum *num.* 31. animadvertit poſteriorem ſeriem integratione habita citiſſime convergere. Quo jam quæſtio omnis eo deducta ab Eulero fuit, ut conſtantes coefficientes A, B, C &c. invenirentur. Ad id vero etiam præſtandum *num.* 26. oſtendit coefficientes omnes C, $\mathcal{D}$ &c. certa lege ſe invicem excipere, atque ex duobus primis A,& B pendere: deinde *num.* 29. pro inveniendis ipſis coefficientibus A,& B peculiarem methodum exhibuit, ex iis ſeriebus derivatam, quæ pro angulo recto multifariam dividendo tradi ſolent. Denique numeris ſuo loco ſingulis ſubſtitutis Arithmeticas ſeries ſatis convergentes exhibuit. Ex. gr. ſeries, quæ diſtantiam Saturni a Sole definit tempore conjunctionis Jovis, & Saturni eſt $1 + 0.0008542 + 0.0001449 + 0.0000335 + 0.0000105$, in qua binæ fractiones poſteriores decreſcunt fere in ratione $3:1$, binæ vero aliæ in ratione $6:1$. Vide *num.* 38. Ingenioſiſſimus Alembertius *lib.* 2. diſquiſitionum ſuarum de Mundi ſyſtemate *cap.* 3. *num.* 225. & *ſequ.* ex binomiorum formulis aliam methodum eruit pro iiſdem coefficientibus determinandis, in qua illud commodi, & elegantiæ eſt, quod C, $\mathcal{D}$, & reliqui coefficientes omnes ſeriei, in quam $(M - Cos.\,z)^{-\frac{3}{2}}$, aut $(M - Cos.\,z)^{-\frac{5}{2}}$ reſolvi poteſt, ex duobus primis A, & B pendeant, & primus A exprimatur ſerie, quæ poſt quinque, aut ſex terminos in progreſſionem Geometricam recidit, B vero ſerie alia exprimatur, quæ ſimiliter deſinit in progreſſionem Geometricam poſt ſeptem, aut octo priores terminos.

Ego vero cum primam illam lente adeo convergentem ſeriem conſiderarem, animadverti quod ſi non vires ipſæ perturbatrices inquirerentur, ſed aut vires dumtaxat mediæ, aut ſumma virium omnium, quæ ſingulis revolutionibus reſpondet; illud ſtatim commodi occurreret, quod negligi deberent potentiæ omnes ſinuum, & coſinuum exponentis cujuſcumque imparis, utpote quæ, cum contrariis ſignis afficiantur, integra revolutione compenſant ſeſe invicem, ac de-

ſtruunt.

ſtruunt. Hoc ipſo prima eadem ſeries, paribus terminis omiſſis, in hanc aliam degenerabit $A + C.\overline{Cos.z}^2 + E.\overline{Cos.z}^4$ &c., quæ poſito æquali terminorum numero jam multo citius converget. Deinde ſi a ſimpliciſſima orbitarum concentricarum, & circularium hypotheſi exordium ſumendum ſit, & qua ratione Newtonus vim mediam, quæ in Lunam agit, determinavit, ſupputandæ ſint vires mediæ earum omnium virium, quæ circulares, & concentricas Primariorum Planetarum orbitas perturbant, colligendo ſcilicet vires omnes, & ſummam per circularis orbitæ peripheriam dividendo; aliud inſuper commodum habebitur, quod cum quantitates plures a ſe invicem ſint ſubducendæ, citius etiam converget ſeries, quæ exprimet vires medias, & quæ conſtantibus quantitatibus, diverſiſque radii poteſtatibus definietur. Ita vis media Jovis, quæ ex actione Saturni orietur, exprimetur ſerie 3.6982249 − 0.0000918 − 0.0000309 − 0.0000096, in qua tres poſteriores termini, qui deſignant Saturni vim, præ primo ſatis ſunt parvi, & decreſcunt fere in ratione 3:1. Ita igitur ſeries habebuntur, quæ non minore convergent celeritate, quam ſeries aliæ a Cl. Eulero exhibitæ, & prior illa problematis difficultas, quæ ex finita proportione diſtantiarum Planetæ attracti, attrahentiſque a Sole oritur, facile ſublata erit.

Minus etiam negotii faceſſet difficultas altera, quam caſus alterius eſſe diximus, in quo Planeta attrahens non jam ſuperior, ſed inferior ſit quam qui attrahitur. Quemadmodum enim dum Planeta attrahens ſuperior eſt, ſeries, quæ vires perturbatrices exprimunt ſic comparantur, ut Planetæ attrahentis diſtantia a Sole terminorum ſingulorum denominatores afficiat, & diſtantia Planetæ attracti numeratores; ita dum Planeta attrahens eſt inferior, convertendæ ſunt ſeries, & in numeratores diſtantia Planetæ attracti rejicienda eſt. Hoc ipſo ſeries non minus convergentes habebuntur. Ex. gr. media vis centripeta Jovis orta ex actione Solis, & Saturni exprimetur hac alia ſerie 1.108033 + 0.001232 + 0.000276 + 0.000077, in qua ſecundus terminus ad tertium ſe-

fere ſe habebit ut 5 : 1, & tertius ad quartum ut 4 : 1. Quod ſi non circulares, & concentricæ, ſed ellipticæ Planetarum orbitæ intelligantur, in quarum foco alterutro ſit Sol, longior quidem evadet calculus, calculi tamen ratio, & methodus erit eadem. Calculus etiam ad breviorem, ſimpliciोremque formam revocabitur, ſi abſciſſæ non in ellipſi, ſed in circulo accipiantur, & ellipſis ad circulum referatur, negliganturque altiores omnes excentricitatis poteſtates: quod confidentius præſtare licet, quoniam in Jove, & Saturno, in quibus perturbationes motus majores ſunt, excentricitates orbitarum non niſi $\frac{1}{38}$, & $\frac{1}{18}$ conſtituunt diſtantiæ mediæ Saturni a Sole, & vires ipſæ perturbatrices ſunt circiter $\frac{1}{4082}$, & $\frac{1}{1108}$ gravitatis abſolutæ in Solem. Ita eruentur vires perturbatrices in interiorem, exterioremque ellipticam orbitam exercitæ, & ſola formularum contemplatione manifeſtum fiet quo ex loco Planetæ attrahentis, & quo cum Apſidibus aſpectu vis centripeta Planetæ attracti augeatur, aut imminuatur, & motus ſecundum tangentem orbitæ conceptus acceleretur, aut retardetur.

At ſi ipſe etiam Planeta attrahens circa Solem moveri intelligatur, orietur gravior problematis difficultas. Newtonus in *Prop.* 30., 31., & 32. *lib.* 3. *Princip.* cum quæreret motum medium nodorum Lunæ, in primis dato nodorum, Soliſque aſpectu determinavit motum medium nodorum ſingulis Lunæ revolutionibus: deinde aliis, aliiſque aſpectibus ſeſe excipientibus, accepto medio mediorum omnium, determinavit medium nodorum motum pro loco quolibet nodorum eorumdem reſpectu Solis. Quod præſtitum recte eſt: etenim ob lentiſſimum Solis motum, Luna a ſyzigiis digreſſa, poſt integram revolutionem ne uno quidem ſigno a priore loco diſſitum invenit Solem ipſum. Planetarum quorumdam caſus fere idem eſt. Integra enim Terræ revolutione Jupiter unum dumtaxat ſignum abſolvit, & Planetæ alii inferiores tanta angulari celeritate moventur circa Solem, ut præ ipſis Jupiter veluti in ſingulis orbitæ ſuæ punctis quieſcens

ſcens ſpectari poſſit. Idcirco Hallejus cum Apheliorum motus obſervationibus Aſtronomicis minus accurate determinari animadverteret, motum Apheliorum Terræ, Veneris, & Mercurii regula illa definire maluit, quam Newtonus ſuppeditavit in ſcholio *prop.* 14. *lib.* 3., & qua idem caſus ſtatuitur Lunæ reſpectu Solis, ac trium Planetarum inferiorum reſpectu Jovis. Igitur eodem modo data vi, aut acceleratione media, quæ ex dato Jovis loco habetur ſingulis Planetarum inferiorum revolutionibus, determinari poterit quæ ſit mediarum omnium virium vis media, quæ ex omnibus Jovis locis exercetur, ſeu quæ datæ orbitarum, & Apſidum poſitioni pro aſpectu quocumque Jovis vis proprie media reſpondeat. In aliis autem Planetis cum alia obtineat proportio velocitatum diſpar etiam caſus eſt. Et quidem Jupiter dimidiam revolutionem complet dum in orbita ſua Saturnus 72° circiter abſolvit. Deinde quæ inferiorum Planetarum major celeritas angularis inveſtigationem virium perturbatricium, quæ ex ſuperioribus Planetis proficiſcuntur, faciliorem reddit, eadem inveſtigationem virium, quibus ab inferioribus Planetis perturbantur ſuperiores, reddit implicatiſſimam.

Neque inde difficultatis effugium aliquod erui poteſt, quod continuato motu, & aſpectibus omnibus duorum Planetarum ſeſe excipientibus, unumquodque punctum unius orbitæ cum punctis ſingulis orbitæ alterius combinari debeat, adeoque ſumma omnium virium habeatur colligendo vires omnes, quæ ex unoquoque puncto unius orbitæ in alterius puncta omnia exercentur. Plura enim ſunt puncta duarum orbitarum, quæ nunquam ſimul combinantur, plures duorum Planetarum aſpectus ſunt impoſſibiles. Digrediantur eodem tempore Terra, & Mercurius ex dato loco. Quoniam Mercurius quatuor circiter revolutiones peragit dum Terra unam abſolvit, poſt unam revolutionem reverſus ad idem punctum Terram a priore loco 90°, & poſt duas, ac tres 180°, ac 270° diſſitam inveniet, poſt quatuor autem redibunt aſpectus omnes, qui erant antea. Itaque quatuor dumtaxat orbitæ terreſtris puncta erunt, quæ cum dato orbitæ Mercurii puncto combinentur. Eodem modo intelligetur 2, 12,

30 esse puncta orbitarum Martis, Jovis, & Saturni, quæ combinentur cum dato aliquo puncto terrestris orbitæ. Generatim sint m, & n periodica tempora Planetæ superioris, inferiorisque, atque ambobus simul digredientibus ex datis locis requiratur post quem numerum x revolutionum Planeta inferior superiorem Planetam peractis revolutionibus numero y dato arcu a priore loco dissitum inveniet. Sit $\frac{m}{c}$ tempus, quo superior Planeta absolvere potest arcum ipsum. Erit $nx = my + \frac{m}{c}$, sive $x = \frac{mcy + m}{nc}$. Sunt vero x, & y numeri integri. Itaque etiam $\frac{mcy + m}{nc}$ numerum integrum esse oportebit: quod sæpius est impossibile. Ex. gr. sit $m = 12$, $n = 1$, $c = 24$. Erit $x = 12y + \frac{1}{24}$, qui semper numerus fractus est, quicumque numerus integer sit y.

At vero in primis difficultas omnis minime officit, quominus perturbationes Terræ, Veneris, & Mercurii, quæ ex Jove oriuntur, pari tractentur facilitate, quam quæ ex Sole oriuntur Lunæ perturbationes. Nam quoniam Terra a conjunctione Jovis digressa post singulas revolutiones paulo majore spatio Jovem a priore aspectu dissitum invenit, quam Luna Solem inveniat, vis media in Terram a Jove exercita satis proxime supputabitur colligendo vires medias omnes, quæ ex quolibet Jovialis orbitæ puncto in puncta omnia terrestris orbitæ exercentur, & medium rursus ex omnibus accipiendo. Hoc ipso aliquis erit factus in cælesti Physica progressus si Lunæ, & Planetarum inferiorum aberrationes una, eademque methodo complectantur. Deinde ad Planetas alios quod pertinet, manifestum est, vires Saturni in Jovem maximas esse in conjunctione, in oppositione minimas, in octantibus conjunctionis majores quam in octantibus oppositionis, & ita porro. Ita igitur quo plura puncta, & aspectus combinentur inter se, eo etiam arctiores habebuntur virium mediarum limites. Rursus mediarum virium limitem aliquem exhibent vires, quas Saturnus exerceret si semper in Aphe-

lio

lio suæ orbitæ, aut semper in Perihelio reperiretur: limitem alium vires, quæ ex octantibus Aphelii, aut Perihelii exercerentur: & alium pariter vires, quæ punctis aliis analogis responderent. Quare approximationis alicujus gratia primo animum subiit simul colligere vires omnes, quæ ex datis aliquot punctis circa oppositionem, conjunctionemque, Aphelium, & Perihelium ab uno in alium Planetam superiorem, aut inferiorem semper exercerentur, & summam ipsam dividere per numerum punctorum. Animadverti autem approximationem evadere accuratiorem supputando vires punctorum omnium, ac temporum, & summam aut per orbitæ perimetrum, aut per tempus periodicum dividendo. Et licet ob inæquabilem motum Planetarum vis media non sit medium Arithmeticum terminorum omnium ita acceptorum; medium tamen Arithmeticum, quod accipitur, a vi media non adeo dissidere necesse est, atque ita approximationem illius generis haberi, quam pro praxi Astronomica, & problematis hujus generis sufficere initio dictum est.

Hac demum ratione erutis viribus omnibus perturbatricibus Planetarum superiorum, inferiorumque detegi poterit quibus aspectibus, & quo gradu velocitas projectionis in hypothesi orbitarum circularium augeatur, vel imminuatur, & qui sint motus nodorum singulorum, inclinationisque orbitarum inter se. In hypothesi etiam orbitarum ellipticarum præsto erit quæ variationes pendeant ex vario aspectu Planetæ attrahentis, & Apogæi, atque orbitæ Planetæ attracti, & quæ pendeant ex varia positione utriusque orbitæ. In æquationibus posterioris hujus generis supputandis singillatim immorari volui, tum pro argumenti elegantia, & dignitate, tum quod vicissitudines mediorum motuum Parisiensis Scientiarum Academia anno 1760 præmio proposito postulaverit. Videbatur enim generalis gravitatis theoriæ defectum, atque exceptionem esse, quod cum actione Jovis augeri debeat gravitas Saturni in Solem, & gravitas Jovis imminui Saturni actione, coarctari etiam deberet Saturni orbita, & orbita Jovis dilatari semper, & tempus periodicum Saturni quidem imminui, Jovis autem augeri: cum potius tempus periodi-

cum Jovis corripi, & Saturni tempus diuturnius fieri obfervationibus Aftronomicis compertum fit. Totius equidem difficultatis hujus folutio facile patet iis omnibus, qui in perfcrutandis gravitatis legibus verfati funt. Nam fi ftatuamus initio eas fuiffe utriufque orbitæ dimenfiones, quæ non jam gravitati abfolutæ in Solem dumtaxat, fed fummæ, aut differentiæ gravitatis abfolutæ, & vis perturbatricis Jovis, aut Saturni refpondiffent; nullas jam amplius dimenfionum, & periodicorum temporum viciffitudines ob vim ipfam perturbatricem utriufque Planetæ orbitæ pati poterant. Quod fi primo eæ fuiffent diftantiæ Saturni, Jovifque a Sole, quas gravitate abfoluta in Solem tueri femper potuiffent Planetæ ipfi; accedente quidem vi perturbatrice, & gravitate aucta, aut imminuta propius ad Solem accedere debuiffent, aut a Sole aliquantulum recedere. At vero ubi femel eas fibi comparaffent diftantias, quæ effent viribus totis reciproce proportionales, manente velocitate projectionis, defiiffent motus omnes acceffus, & receffus continui a Sole. Ita difficultate omni exfoluta, ex ipfis gravitatis legibus eruenda poftmodum ratio fupererat, qua periodicum tempus Jovis in dies brevius, & Saturni tempus diuturnius evaderet.

Caffinus in Monumentis Academiæ anno 1746 cum rationem aliquam phyficam totius phænomeni dare vellet, in pluribus orbitarum locis Saturni, & Jovis vires fupputando ftatuit, pro ea pofitione Apfidum, quæ modo eft, velocitatem projectionis Jovis a Saturno augeri femper, & velocitatem Saturni a Jove imminui: quod quidem fi verum effet, dilatari deberet Jovis orbita, & tempus periodicum augeri, æque ac fi manente projectionis velocitate gravitas abfoluta in Solem imminueretur. Eulerus in fuis opufculis cum refiftentiam ætheris infinite parvam effe nollet, cenfuit retardari ob medii refiftentiam Planetas omnes, & coarctari propterea orbitas, & tempus periodicum imminui: cum potius, ut fuo loco videbimus, motus Veneris, & Martis fatis regulares fint, & Saturni tempus periodicum augeatur. In differtatione vero de inæqualitatibus Jovis, & Saturni *art.* 4.

num.

num 60. Eulerus ex gravitatis legibus æquationem quamdam eduxit, quæ magis semper magisque successu temporis augeri debet, & quæ explicandis variationibus sæcularibus mediorum motuum idonea censeri posset. At ipsa æquatio vectorem Saturni radium circularibus arcubus definit, quæ expressio ab Alembertio *num.* 239. de Mundi systemate jure merito reprehensa est, & quæ minime excidisset Eulero, ubi Apogæi Jovialis motum considerasset, nec suas æquationes unica hypothesi circumscripsisset, quod Jovis orbita sit circularis. Alembertius omnium primus mutato coefficiente unius termini, qui ad definiendam orbitam adhibetur, eodem loco æquationem mediorum Saturni motuum exhibuit, quæ integris annis 97200 augeri debet, & singulis Saturni revolutionibus ad 100" etiam potest ascendere.

Ego indicatam superius methodum excolendo deprehendi quidem in orbibus circularibus Planetas tantumdem semper accelerari, ac retardari, & velocitatem mediam projectionis revolutionibus singulis eamdem retinere. At facta hypothesi orbitarum ellipticarum, & orbitis, atque Apsidibus Planetarum ad invicem positis, ut modo sunt, inveni velocitatem projectionis Jovis Saturni actione imminui, & velocitatem Saturni actione Jovis pluribus revolutionibus sibi succedentibus augeri semper oportere, & facili negotio ex data velocitatis æquatione sæcularem æquationem mediorum motuum, & periodicorum temporum derivavi. Singula Academiæ Regiæ, ut tunc erant exposita, communicavi: quæ cum intellexissem judicibus sapientissimis Alembert, Clairaut, & Camus minime displicuisse, animum subiit aggredi rursus argumentum ipsum, & ad breviorem formam, simplicioremque revocare. Cum autem modo me ab hisce studiis alia negotia abducant, & Rheni potissimum, aliorumque amnium late per agrum Bononiensem vagantium insolentia; quæ elucubrata sunt hactenus, in lucem publicam edenda esse existimavi. Dissertationem omnem duobus libris complexus sum. Primo expendentur singula, quæ respiciunt hypothesim circularium orbitarum, incrementum, & decrementum velocitatis projectilis in conjunctione, oppositione, & quadraturis, re-

regreſſionem nodorum, variationemque inclinationis orbitarum tam inter ſe, quam ad planum Eclipticæ, & inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem. Secundo libro abſolventur cætera, quæ ad hypotheſim orbitarum ellipticarum, & ſæculares potiſſimum æquationes motuum mediorum pertinent. Licet enim Planetarum orbitæ nec circulares ſint, nec ellipticæ, ad ellipſim tamen, & circulum proxime accedunt, & ſublatis viribus perturbatricibus, quæ præ gravitate tota in Solem adeo exiguæ ſunt, Planetæ ellipſes ſuas parum excentricas, & circulis finitimas deſcriberent. Præſtat autem datis viribus perturbatricibus æquationes ellipticorum motuum inquirere, quam ex omnibus ſimul viribus analyticam orbitarum æquationem inquirendo ſe in calculos inextricabiles committere.

DE

DE

INÆQUALITATIBUS

PLANETARUM

IN ORBITIS CIRCULARIBUS

LIBER PRIMUS.

DE

INÆQUALITATIBUS

IN ORBITIS CIRCULARIBUS

CAPUT PRIMUM.

De viribus mediis Planetarum in orbitis circularibus.

LEMMA PRIMUM.

Quantitates materiæ in Sole, Terra, Jove, & Saturno sunt inter se ut 1, $\frac{1}{169282}$, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, sive ut 10000, 0.06, 9.37, 3.31, juxta Newtonum in *Propos.* 8. *Lib.* 3. Principiorum editionis Londinensis anni 1726. Newtonus vero semidiametrum orbitæ quarti Jovis Satellitis e Sole visæ statuit 8' 16", quam Cassinus in elementis Astronomiæ 8' 45" esse voluit. Hac correctione adhibita Boscovichius in dissertatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni *num.* 169, aliisque calculi elementis ex Cassino ipso depromptis massas Jovis, & Saturni statuit 11. 121, 3. 029. Newtonus in editione Amstelodamensi anni 1714 statuit massas ipsas 9. 68, 4. 15, & Gravesandius in postrema editione 9. 305, 3. 25. Aliis etiam elementis ex Caillio depromptis evaderet Terræ massa 0. 05, & ita porro.

Lemma Secundum.

Sit convertenda in feriem fractio $\frac{1}{(P+PQ)^{\frac{m}{n}}}$. Scribatur pro fractione ipfa $(P+PQ)^{-\frac{m}{n}}$. Tum juxta Newtonianum binomii theorema evadet fractio $= P^{-\frac{m}{n}} \frac{-m}{n} P^{-\frac{m}{n}} Q$ $-\frac{m}{n} \cdot \frac{-m-n}{2n} P^{-\frac{m}{n}} Q^2 -$ &c $= \frac{1}{P^{\frac{m}{n}}} - \frac{\frac{m}{n} Q}{P^{\frac{m}{n}}} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m+n}{2n} Q^2}{P^{\frac{m}{n}}}$ $\frac{-\frac{m}{n} \cdot \frac{m+n}{2n} + \frac{m+2n}{3n} Q^3}{P^{\frac{m}{n}}}$ + &c. Scilicet eadem feries habebitur, in quam quantitas $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ refolvi folet, mutatis dumtaxat fignis terminorum numero imparium, ac quantitate n pofitive femper accepta, rejectaque in denominatores fractionum fingularum $P^{\frac{m}{n}}$.

Lemma Tertium.

Si in circulo $BRbr$, *fig.* 1, fiat $TM=b$, $TN=x$, $MN=y$, $MB=z$, erit $Sx^{2m}dz = \frac{2m-1}{2m} \cdot b^2 Sx^{2m-2}dz - \frac{byx^{2m-1}}{2m}$, & fi fiat $y=0$, erit $Sx^{2m}dz = \frac{2m-1}{2m} b^2 Sx^{2m-2}dz$. Quare fi radius ad peripheriam fe habeat ut $1 : \Delta$, habebitur $Sx^2 dz = \frac{1}{2} b^3 \Delta$, $Sx^4 dz = \frac{3}{8} b^5 \Delta$, $Sx^6 dz = \frac{5}{16} b^7 \Delta$, Sx^8

dz

$dz = \frac{35}{128} b^9 \Delta$, &c. Quod si summa omnium x^2, x^4, x^6 &c. per circularem peripheriam dividatur, prodibit valor medius quantitatum earumdem, scilicet $\frac{1}{2} b^2$, $\frac{3}{8} b^4$, $\frac{5}{16} b^6$ &c. Erit etiam valor medius quantitatis $x^2 y^2 = \frac{1}{2} b^4 - \frac{3}{8} b^4 = \frac{1}{8} b^4$, & valor medius quantitatis $x^4 y^2 = \frac{3}{8} b^6 - \frac{5}{16} b^6 = \frac{1}{16} b^6$, quantitatum $x^6 y^2$, aut $x^2 y^6$ erit $\frac{5}{128} b^8$, & $\frac{3}{128} b^8$ quantitatis $x^4 y^4$.

PROBLEMA PRIMUM.

Si Planeta M, *fig.* 2, & 3, moveatur in circulari orbita BMb circa majorem Planetam T, & Planeta alius statuatur in loco A, nec distantia unius præ alterius distantia a centro infinita censeri possit; invenire vim mediam, quæ juxta radii directionem Planetæ motum perturbat.

RESOLUTIO.

Si massæ trium Planetarum vocentur A, M, T, erunt vires acceleratrices, quibus priores duo tendent versus se invicem $\frac{A+M}{AM^2}$: vires, quibus versus se tendent primus, & tertius $\frac{A+T}{AT^2}$: vires, quibus se se versus tendent secundus, & tertius $\frac{M+T}{MT^2}$. Porro $\frac{T}{AT^2}$, & $\frac{T}{MT^2}$ exprimunt vires centripetas, quibus duo Planetæ circa centrum circulares orbitas describerent. Deinde $\frac{M}{AM^2}$, $\frac{M}{MT^2}$, exprimunt vires, quibus circularis motus Planetæ A perturbabitur. Denique $\frac{A}{AM^2}$, & $\frac{A}{AT^2}$ exprimunt vires quibus secundum AM, & AT pertur-

babitur motus Planetæ M, & erit $\frac{A.AT}{AM^3} - \frac{A}{AT^2}$ differentia virium, quæ fecundum directionem eamdem AT motum ipfum perturbabunt. Quare fi maffa Planetæ A unitate exprimatur, & ex A in MT demittatur perpendiculum AO, ob TM: $TN = TA$: TO, erit vis qua imminuetur gravitas Planetæ in centrum $= \frac{AT.TO}{AT.AM^3} - \frac{TO}{TA^3} = \frac{AT.TN}{MT.AM^3} - \frac{TN}{MT.AT^2}$, & fi diftantia AT vocetur a, & fpecies aliæ accipiantur quemadmodum in tertio lemmate, erit ipfum gravitatis decrementum $= \frac{\mp ax}{b\left(\overline{a \mp x}^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mp x}{b a^2} = \frac{\mp ax}{b\left(a^2 + b^2 \mp 2ax\right)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{x}{b a^2}$, & vis qua gravitas augebitur erit $= \frac{b}{\left(a^2 + b^2 \mp 2ax\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Casus Primus.

Statuatur primo fuperior Planeta A, & refolvantur expreffiones fingulæ in feries, quarum denominator fit aliqua diftantiæ AT poteftas, numerator vero aliquod factum ex quantitatibus b, & x: quæ feries, ob $a > b$, convergent aliquo modo, & perturbatricium virium rationem vero proximam exhibere poterunt. Supputandi ex. gr. fint termini, in quibus quantitates b, & x quomodocumque inter fe ductæ quintam dimenfionem non fuperant, & in formula fecundi lemmatis fiat $m = 3$, $n = 2$,

$$\frac{1}{\mathcal{P}^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^3}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\mp 2ax + b^2}{a^2}$$

$$\frac{-\frac{m}{n}\mathcal{Q}}{\mathcal{P}^{\frac{m}{n}}} = -\frac{3}{2}\frac{\left(\mp 2ax + b^2\right)}{a^5} = \pm\frac{3x}{a^4} - \frac{3b^2}{2a^5}$$

+ m

$$\frac{+\frac{m}{n}\cdot\frac{m+n}{2n}Q^2}{\mathcal{P}^{\frac{m}{n}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{5}{4}\left(\mp 2ax+b^2\right)^2}{a^7}=\frac{15x^2}{2a^5}\mp\frac{15b^2x}{2a^6}+\frac{15b^4}{8a^7}$$

$$\frac{-\frac{m}{n}\cdots\frac{m+2n}{3n}Q^3}{\mathcal{P}^{\frac{m}{n}}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\frac{\left(\mp 8a^3x^3+12a^2b^2x^2\mp 6ab^4x\right)}{a^9}=\pm\frac{35x^3}{2a^6}-\frac{105b^2x^2}{4a^7}\pm\frac{105b^4x}{8a^8}$$

$$\frac{+\frac{m}{n}\cdots\cdots\frac{m+3n}{4n}Q^4}{\mathcal{P}^{\frac{m}{n}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}\frac{\left(16a^4x^4\mp 32a^3b^2x^3\right)}{a^{11}}=\frac{315x^4}{8a^7}\mp\frac{315b^2x^3}{4a^8}$$

$$\frac{-\frac{m}{n}\cdots\cdots\frac{m+4n}{5n}Q^5}{\mathcal{P}^{\frac{m}{n}}}=\pm\frac{693x^5}{8a^8}$$

Neglectis igitur terminis, qui ambiguo ſigno hinc inde deſtruuntur erit vis, quæ gravitati detrahetur $=\frac{3x^2}{ba^3}-\frac{15bx^2}{2a^5}+\frac{35x^4}{2ba^5}+\frac{105b^3x^2}{8a^7}-\frac{315bx^4}{4a^7}+\frac{693x^6}{8ba^7}$, & vis, quæ addetur gravitati, erit $=\frac{b}{a^3}-\frac{3b^3}{2a^5}+\frac{15bx^2}{2a^5}+\frac{15b^5}{8a^7}-\frac{105b^3x^2}{4a^7}+\frac{315bx^4}{8a^7}$. Quod ſi igitur ſumma omnium virium juxta lemma tertium accipiatur, dividaturque per circularem peripheriam, erit vis media gravitati in centrum detracta $=\frac{3b}{2a^3}-\frac{15b^3}{4a^5}+\frac{105b^3}{16a^5}+\frac{105b^5}{16a^7}-\frac{945b^5}{32a^7}+\frac{3465b^5}{128a^7}=\frac{3b}{2a^3}+\frac{45b^3}{16a^5}+\frac{525b^5}{128a^7}$: & vis media gravitati addita erit $=\frac{b}{a^3}-\frac{3b^3}{2a^5}+\frac{15b^3}{4a^5}+\frac{15b^5}{8a^7}-\frac{105b^5}{84a^7}+\frac{945b^5}{64a^7}=\frac{b}{a^3}+\frac{9b^3}{4a^5}+\frac{225b^5}{64a^7}$, & differentiam duarum virium accipiendo erit medium gravitatis decrementum $=\frac{b}{2a^3}\left(1+\frac{9b^2}{8a^2}+\frac{75b^4}{64a^4}\right)$. Quod erat primum.

Co-

Corollarium Primum.

Si mediæ diſtantiæ Jovis, & Saturni a Sole ſint 52, 95, & quantitates materiæ in Sole, & Saturno ſtatuantur 10000, & 3.029 juxta lemma primum, erit gravitas media Jovis in Solem $= \frac{10000}{52^2} = \frac{10000}{2704} = 3.6982249$, & medium gravitatis decrementum, quod ex actione Saturni oritur $= \frac{78.754}{857375}$ $\left(1 + \frac{24336}{72200} + \frac{5483712}{521283336}\right) = 0.0000918 + 0.0000309 + 0.0000096 = 0.0001023$.

Corollarium Secundum.

Pariter cum media gravitas Martis in Solem ſit $= \frac{10000}{15^2} = 40$, erit medium gravitatis decrementum ex Jovis actione ortum $= \frac{166.815}{281216}\left(1 + \frac{2025}{21632} + \frac{3796875}{4679434424}\right) = 0.0005932 + 0.0000555 + 0.0000048 = 0.0006535$, poſita ſcilicet Jovis maſſa = 11. 121. Actio media Saturni in Martem erit quam proxime = 0.0000272.

Corollarium Tertium.

Denique cum Terræ, Veneris, & Mercurii in Solem gravitas ſit circiter 100, 204, 1111, erit actio media Jovis in Terram = 0.000412, in Venerem = 0.000282, in Mercurium = 0.000118. Actio media Terræ in Venerem erit circiter = 0.00031, ſcilicet paulo major actione Jovis.

Casus Secundus.

Quod ſi Planeta attrahens ſit inferior, & ſit $a < b$, reſolvatur utraque expreſſio perturbatricium virium in ſeries, qua-

quarum denominatores ſint aliquæ potentiæ radii b, numeratores vero ſint facta ex quantitatibus a, & x, fiat ſcilicet in lemmate ſecundo $P = b^2$, $Q = \mp \frac{2ax + a^2}{b^2}$. Hoc poſito manifeſtum eſt in denominatoribus ſingulis ſerierum pro primo caſu erutarum quantitatem b^3 quantitati a^3 ſubſtitui oportere, in numeratoribus vero ponendum eſſe $\mp \frac{2ax}{b^2}$ loco $\mp \frac{2ax}{a^2}$, & $\frac{a^2}{b^2}$ loco $\frac{b^2}{a^2}$, ut prodeant ſeries aliæ, quæ vires Planetæ attrahentis, & centro propioris exprimant. Quare ſi pariter ii ſoli termini ſupputandi ſint, in quibus Planetæ ipſius diſtantia a centro quintam dimenſionem non ſuperat, prodibit $\frac{1}{(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} \pm \frac{3ax}{b^5} - \frac{3a^2}{2b^5} + \frac{15a^2x^2}{2b^7} \mp \frac{15a^3x}{2b^7} \pm \frac{35a^3x^3}{2b^9} + \frac{15a^4}{8b^7} - \frac{105a^4x^2}{4b^9} + \frac{315a^4x^4}{8b^{11}} \pm \frac{105a^5x}{4b^9} \mp \frac{315a^5x^3}{4b^{11}} \pm \frac{693a^5x^5}{8b^{13}}$: & erit vis gravitati addita $= \frac{1}{b^2} - \frac{3a^2}{2b^4} + \frac{15a^2x^2}{2b^6} + \frac{15a^4}{8b^6} - \frac{105a^4x^2}{4b^8} + \frac{315a^4x^4}{8b^{10}}$, & vis media $= \frac{1}{b^2} + \frac{9a^2}{4b^4} + \frac{225a^4}{64b^6}$. Pariter negligendo terminos, qui ambiguo ſigno ſe deſtruunt, erit vis detracta gravitati $= \frac{3a^2x^2}{b^6} - \frac{15a^4x^2}{2b^8} + \frac{35a^4x^4}{2b^{10}}$, & vis media $= \frac{3a^2}{2b^4} + \frac{45a^4}{16b^6}$. Quare differentiam virium accipiendo fiet medium gravitatis incrementum $= \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{3a^2}{4b^2} + \frac{45a^4}{64b^4}\right)$. Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

Factis iiſdem ſubſtitutionibus, quæ ſupra, erit gravitas media Saturni in Solem $= 1.108033$, & medium gravitatis incrementum ex Jove ortum erit =

II.

$\frac{11 . 121}{9025}\left(1 + \frac{8112}{36100} + \frac{32902272}{5212833600}\right) = 0.001232 + 0.000276 + 0.000077 = 0.001585$. Erit pariter actio media Terræ in Martem $= 0.000383$.

SCHOLION.

Si Planetarum orbitæ circulis valde affines, & circa centrum virium mobiles conciperentur, eademque Newtoni metodo, ex datis viribus perturbatricibus, quæ vim centripetam minuunt, vel augent, motus Apſidum quæreretur; prodiret primo Planetarum omnium Aphelia moveri in conſequentia. Etenim juxta exemplum tertium *Prop. 45. Lib. 1. Princip. Mathem.* ſi m, & n aſſumantur pro quibuſcumque indicibus dignitatum radii vectoris b, aſſumanturque B, & C pro numeris quibuſcumque datis, & vis omnis centripeta ſtatuatur $= \frac{B . b^m + C . b^n}{b^3}$, erit pro ſingulis Planetæ revolutionibus motus Apſidum $= 360° \left(1 - \sqrt{\left(\frac{mB + nC}{B + C}\right)}\right)$. Unde ſi Planeta attrahente ſuperius poſito, ſtatutaque ipſius maſſa ad maſſam Solis ut $1 : M$, ſit inferioris gravitas $= \frac{M}{b^2} - \frac{b}{2a^3}\left(1 + \frac{9b^2}{8a^2} + \frac{75b^4}{64a^4}\right)$, in primis quantitas C negativa erit, deinde fiet $m = 1$, & ſe conſequentes valores quantitatis n erunt 4, 6, 8, adeoque $\sqrt{\left(\frac{mB + nC}{B + C}\right)}$ ſemper minor erit unitate, & motus Apſidum erit progreſſivus. Quod ſi vero Planeta attrahens inferius collocetur, & vis centripeta evadat $= \frac{M}{b^2} + \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{3a^2}{4b^2} + \frac{45a^4}{64b^4}\right)$, primo cum vis $\frac{1}{b^2}$ gravitati toti addatur, ſequaturque eamdem legem, motum Apſidum minime afficiet. Vires autem aliæ ſimiliter cum gravitati ſuperaddantur, adeoque C poſitiva ſit, & n evadet -1, -3, rurſus minor erit unitate quantitas $\sqrt{\left(\frac{mB + nC}{B + C}\right)}$, & Apſides

in

in directum moveri pergent. Hypothesi eidem orbitæ mobilis pressius inhærendo etiam quantitas totius motus erueretur. Ita motus Apsidum Saturni actione Jovis fieret singulis revolutionibus $= 360^\circ . \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1108033 + 1232 - 276 - 231}{1108033 + 1585} \right)} \right)$ $= 502''$, & annis singulis evaderet $17''$ circiter: cujus quidem progressus Apsidum cum $11''$ vi $\frac{3a^2}{4b^4}$, $6''$ vero vi $\frac{45a^4}{64b^6}$ adscribi debeant, si intelligamus alios seriei terminos decrescere eadem proportione, statui poterit ex vi Jovis motus annuus Aphelii Saturni $21''$, aut $22''$, spectatisque etiam viribus quatuor Jovis Satellitum ille eruetur progressus Apsidum, qui cum observationibus Astronomicis consentiet, juxta quas $27''$ circiter statui deberet. At vero ipse etiam Newtonus animadvertit juxta hypothesim orbitæ mobilis motum Lunarium Apsidum duplo fere minorem erui quam vere est, adeoque supputandis Apsidum motibus hypothesim eamdem esse imparem. Walmeslejus in *Coroll.* 1. *par.* 2. Opusculi de motu Apsidum demonstravit orbitæ mobilis hypothesi veros Apsidum motus exhiberi quando vis centripeta exprimitur potentia aliqua distantiæ a centro, non vero quando aut summa, aut differentia est plurium virium. Motum Apsidum Lunæ observationibus apprime consonum ingeniosissime supputarunt Clairautius, Alembertius, Simpsonius, & Walmeslejus. Ego cum generali ratione aliqua motum Apsidum Planetarum omnium supputare vellem, cæpi primo methodum illam excolere, quam *Prop.* 11., & 12. de inæqualitatibus motuum Lunarium exposuit Walmeslejus, utpote quæ brevissima omnium visa est quæ a Luna ad Planetas alios traduceretur. Illa enim methodo nihil aliud assumitur nisi quod vis centripeta, & centrifuga, & vires aliæ perturbatrices in orbitis Planetarum quam proxime eædem sint, quæ in orbitis circularibus haberentur: tum datis viribus inquiritur velocitas, qua centro propius accedere debet Planeta, atque ex data velocitate eruitur tempus quo a maxima ad minimam distantiam a centro pervenit. Quem calculum recte etiam procedere intelligebam licet eæ tantum vires consi-

derentur, quæ juxta directionem radii vectoris agunt, & quibus gravitas in centrum augetur, vel imminuitur, omissis viribus aliis, quibus motus projectionis juxta tangentem orbitæ conceptus acceleratur, aut retardatur. Walmeslejo hanc omissionem objecerat Simpsonius in præfatione Miscellaneorum Mathematicorum, quæ anno 1757 Londini edita sunt. Verum ex subsequenti capite manifestum fiet vires radio vectori perpendiculares integra revolutione in orbitis circularibus sese mutuo destruere, & nullas esse. Deinde ex *cap.* 2. *lib.* 2. præsto erit in orbitis ellipticis portionem illam virium perpendicularium, quæ singulis revolutionibus superest, una Apogæi revolutione compensari pariter signorum oppositione, atque evanescere: adeoque easdem vires potius æquationem motus, quam motum Apsidum afficere. Denique si dato Apogæi Lunæ, Solisque aspectu, & data vi media quæ æquabilem arearum descriptionem perturbat inquiratur æquatio accessus, recessusque a centro, minores prodibunt quantitates, quam ut inde Apogæi motus sensibiliter alteretur. Porro eadem metodo, qua Walmeslejus motum Apogæi Lunæ investigavit, ad Planetas inferiores traducta, quatenus a superioribus perturbantur, iisdemque retentis denominationibus, quæ supra, inveni quod tempus dimidiæ revolutionis esset ad tempus, quo revera Planeta inferior angulum inter Apsides describeret ut $\frac{M}{b^2} - \frac{7b}{4a^3} - \frac{81b^3}{32a^5}$ &c: $\frac{M}{b^2}$: quo dato motus annuus Aphelii Jovis, qui actione Saturni gignitur, fieret 10" circiter, & motus annuus Aphelii Martis, & Terræ, qui gignitur actione Jovis, evaderet 37", & 18", motus autem Aphelii Veneris, & Mercurii minuendus esset in ratione sesquiplicata distantiæ a Sole. Verum cum nihil hactenus invenerim, quod generatim pro Planetis omnibus satisfaceret, maxime cum de motu Apogæi Planetarum superiorum agitur, qui actione inferiorum Planetarum gignitur, idcirco malui hæc omnia obiter scholii loco, & brevissime indicare.

Ca-

CAPUT SECUNDUM.

De Planetarum velocitate in conjunctione, oppositione, & quadraturis.

PROBLEMA SECUNDUM.

Iisdem positis invenire vim totam secundum tangentem circularis orbitæ exercitam, & differentiam velocitatis in syzigiis, & quadraturis.

RESOLUTIO.

Positis omnibus ut supra erit vis Planetæ A secundum AO parallelle tangenti circularis orbitæ BNb exercita in punctum $M = \frac{AT \cdot AO}{AT \cdot AM^3} - \frac{AO}{AT^3} = \frac{AT \cdot NM}{MT \cdot AM^3} - \frac{NM}{MT \cdot AT^2} =$ $\frac{ay}{b(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{ba^2}$. Est autem acceleratio in elemento quovis circularis arcus $\pm \frac{bdx}{y}$ directe ut vis accelerans, & tempus: celeritas vero ipsa est ut elementum arcus directe, & tempus reciproce. Quare compositis rationibus si Planetæ attracti celeritas vocetur V, erit $VdV = \frac{\pm adx}{(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{dx}{a^2}$: & si Planeta attrahens sit superior, & a censeri possit major quam b, evoluta in seriem fractione habebitur $VdV =$

$$\frac{3xdx}{a^3} \mp \frac{3b^2dx}{2a^4} \pm \frac{15x^2dx}{2a^4} - \frac{15b^2xdx}{2a^5} + \frac{35x^3dx}{2a^5} \pm \frac{15b^4dx}{8a^6} \mp \frac{105b^2x^2dx}{4a^6} \pm \frac{315x^4dx}{8a^6}$$

$$V^2 = C + \frac{3x^2}{a^3} \mp \frac{3b^2x}{a^4} \pm \frac{5x^3}{a^4} - \frac{15b^2x^2}{2a^5} + \frac{35x^4}{4a^5} \pm \frac{15b^4x}{4a^6} \mp \frac{35b^2x^3}{2a^6} \pm \frac{63x^5}{4a^6}.$$

Jam vero si sit $x = o$, scilicet in quadraturis, evanescet omnis acceleratio, & Planeta velocitatem eamdem retinebit,

qua, ſublata vi perturbatrice, circularem orbitam deſcriberet, & quam propterea per dimidium orbitæ radium cadendo ſua vi centripeta poſſet acquirere. Rurſus ſi maſſa corporis T ad maſſam Planetæ attrahentis ſe habeat ut $M:1$, erit vis centripeta $= \frac{M}{b^2}$, & lapſu per dimidium radium concepto fiet $V\,dV = \frac{M\,dx}{b^2}$, $\frac{1}{2}V^2 = \frac{M}{b^2}\cdot\frac{1}{2}b$, $V^2 = \frac{M}{b} = C$. Igitur in ſyzigiis ubi evadit $x = b$, habebitur

$$V^2 = \frac{M}{b} + \frac{3b^2}{a^3} \mp \frac{3b^3}{a^4} \pm \frac{5b^3}{a^4} - \frac{15b^4}{2a^5} + \frac{35b^4}{4a^5} \pm \frac{15b^5}{4a^6} \mp \frac{35b^5}{2a^6} \pm \frac{63b^5}{4a^6}$$

$$V^2 = \frac{M}{b} + \frac{b^2}{a^3}\left(3 \pm \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} \pm \frac{2b^3}{a^3}\right)$$

& velocitas in ſyzigiis ad velocitatem in quadraturis ſe habebit in ratione ſubduplicata quantitatis

$1 + \frac{b^3}{M.a^3}\left(3 \pm \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} \pm \frac{2b^3}{a^3}\right)$ ad unitatem. Quod erat primum.

Corollarium Primum.

In conjunctione duorum Planetarum, quando x poſitive accipitur, ſuperiora ſeriei ſigna accipienda erunt, inferiora vero pro oppoſitione, quando x accipitur negative. Et quia differentia velocitatum exigua eſt, ſumptis approximationum ope radicibus, erit velocitas in quadraturis ad velocitatis differentiam in conjunctione in ſimplici ratione $1 : \frac{b^3}{2M.a^3}\left(3 + \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} + \frac{2b^3}{a^3}\right)$, in oppoſitione vero $1 : \frac{b^3}{2M.a^3}\left(3 - \frac{2b}{a} + \frac{5b^2}{4a^2} - \frac{2b^3}{a^3}\right)$. Unde ſi Planetæ attracti motus ad ipſum centrale corpus referatur, in ſyzigiis ſemper accelerabitur, & in conjunctione magis quam in oppoſitione, & velocitas in quadraturis ad differentiam velocitatum in conjunctione, & oppoſitione ſe habebit ut $1 : \frac{b^3}{M.a^3}\left(\frac{2b}{a} + \frac{2b^3}{a^3}\right)$.

Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Numeris in locum ſpecierum ſubſtitutis erit velocitas Jovis in quadraturis ad differentiam velocitatis in conjunctionibus Saturni ut $1 : \frac{21 \cdot 29}{857375}\left(3 + \frac{104}{95} + \frac{4056}{3610} + \frac{281206}{857375}\right)$, ſive quam proxime ut $857375 : 128 = 6698 : 1$. In oppoſitione velocitatis differentia fere dimidio erit minor. Martis velocitas in quadraturis ad differentiam in conjunctione Jovis ſe habebit ut $1 : \frac{1 \cdot 88}{140608}\left(3 + \frac{30}{52} + \frac{3375}{10816}\right) = 140608 : 7 = 20087 : 1$. Pariter ſpectata tantum actione Jovis eruetur velocitatem Terræ in quadraturis ad incrementum velocitatis in conjunctione ſe habere ut $70304 : 1$.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si Planetæ attrahentis diſtantia præ radio orbitæ Planetæ attracti infinita cenſeri poſſit, negligi etiam poterunt quadraticæ omnes, & pluſquam quadraticæ radii ipſius poteſtates. Quod ſi inſuper gravitas corporis M in T ſe habeat ad attractionem ſecundum TM exercitam ut $1 : Q$, erit velocitas in quadraturis ad velocitatem in ſyzigiis ut $1 : \surd(1 + 3Q) = \surd(1 - 2Q) : \surd(1 + Q)$, quam velocitatum rationem dedit Mac-Laurinus *Treatiſe of fluxions art.* 490. Pergendo autem a quadraturis ad ſyzigias velocitas augebitur in ratione duplicata ſinus diſtantiæ a quadratura ipſa, ſive in ratione ſimplici ſinus verſi diſtantiæ duplicatæ.

COROLLARIUM QUARTUM.

Quia vis ſecundum MT exercita eſt ad gravitatem corporis T in A ut $MT : AT$, & gravitas corporis T in A eſt ad gravitatem corporis M in T in ratione directa $AT : MT$, & reciproca duplicata temporum periodicorum T circa A, & M circa T, *per Coroll.* 17. *Prop.* 66. *Princip. Mathem.* New-

Newtoni, erit $1 : Q$ in ratione duplicata eorumdem temporum. Quare si tempora vocentur T, & t erit velocitas in quadraturis ad velocitatem in syzigiis ut $T : \sqrt{(T^2 + 3t^2)}$, quam rationem velocitatum dedit Machinius, *Laws of the Moon's motion pag.* 59.

Corollarium Quintum.

Quia tempus periodicum Lunæ circa Terram ad tempus periodicum Terræ circa Solem sese habet in ratione subduplicata 1000:178725, erit velocitas Lunæ in quadraturis ad velocitatem in syzigiis ut $1 : 1 + \frac{300}{35745} = 35745 : 36045 = 11915 : 12015$. Coincidit hæc velocitatis ratio quam proxime cum ratione 11865 : 11965, quam exhibuit Newtonus in *Propos.* 26. *Lib.* 3. *Princip.* Quare problema ipsum Newtoni non nisi peculiaris casus, ac corollarium erit problematis, quod modo generaliter solutum est.

Corollarium Sextum.

Pariter si tempora periodica Jovis circa Solem, & Satellitis extimi circa Jovem statuantur dierum 4332.514, & 16.688 erunt velocitates Satellitis in quadraturis, & syzigiis 3754135, & 3754219, & differentia velocitatum fiet $\frac{1}{37541}$. Et si periodi Saturni circa Solem, & Satellitis extimi circa Saturnum statuantur dierum 10759.275, & 79.325, erunt pariter velocitates in quadraturis, & syzigiis cum Sole 231523997, 23154287, & fiet differentia omnis $\frac{1}{11576}$. Aliorum Jovis, & Saturni Satellitum perturbationes ex Sole ortæ longe minores erunt, quam ut observationibus Astronomicis possint detegi.

Co-

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Generatim vero ſi ipſe etiam Planeta attrahens in orbe ſuo moveri intelligatur, tardius Planeta attractus a quadraturis ad ſyzigias perveniet, & a ſyzigiis rurſus ad quadraturas. Erit autem tempus, quo inferior Planeta angulo quocumque minimo propius accederet ſuperiori, in hypotheſi quod ſolus in orbe ſuo moveri pergat, ad tempus quo eumdem angulum deſcribit in hypotheſi quod bini ſimul circa centrum moveantur, ut motus inferioris Planetæ ad ſummam duorum motuum, & vires acceleratrices, ac celeritates totæ in eadem proportione augebuntur. Itaque differentia velocitatum augenda erit in ſimplici ratione ſummæ angularium motuum ad motum angularem Planetæ inferioris, in Jove ſcilicet in ratione $\frac{1}{12} + \frac{1}{30} : \frac{1}{12}$, ſive $21 : 15$, in Marte in ratione $7 : 6$, in Terra $13 : 12$, & in Luna denique $1080853 : 1000000$.

CASUS SECUNDUS.

Si Planeta attrahens inferior ſit, & primus æquationis terminus reſolvatur in ſeriem, cujus denominatores ſint aliquæ radii b poteſtates, patet ſecundum æquationis terminum $\mp \frac{dx}{a^2}$ minime deſtrui, atque evaneſcere. At ſi conſideremus terminum ipſum perturbationem Solis deſignare, alios fere ſemper Planetas aliquos ex adverſis Solis partibus reperiri, & eorumdem actione prohiberi ne Sol longius recedat a communi centro gravitatis totius ſyſtematis, referri poterit motus Planetæ attracti ad immobile centrum virium, ut ſit $V\,d\,V = \frac{\pm a\,d\,x}{(a^2 + b^2 \mp 2\,a\,x)^{\frac{3}{2}}}$. Hoc ipſo evoluta fractione juxta ſecundum caſum antecedentis Problematis habebitur

V d

$$VdV = \pm \frac{a\,dx}{b^3} + \frac{3a^2xdx}{b^5} \mp \frac{3a^3dx}{2b^5} \pm \frac{15a^3x^2dx}{2b^7} - \frac{15a^4xdx}{2b^7} + \frac{35a^4x^3dx}{2b^9} \&c$$

$$V^2 = \frac{M}{b} \pm \frac{2ax}{b^3} + \frac{3a^2x^2}{b^5} \mp \frac{3a^3x}{b^5} \pm \frac{5a^3x^3}{b^7} - \frac{15a^4x^2}{2b^7} + \frac{35a^4x^4}{4b^9} \ \&c.$$

Quare in ſyzigiis cum ſit $x = b$ fiet

$$V^2 = \frac{M}{b} \pm \frac{2a}{b^2} + \frac{3a^2}{b^3} \pm \frac{2a^3}{b^4} + \frac{5a^4}{4b^5} \pm \frac{2a^5}{b^6}$$

adeoque velocitas in ſyzigiis ad velocitatem in quadraturis ſe habebit in ſubduplicata ratione quantitatis

$1 + \frac{a}{M.b}\left(\pm 2 + \frac{3a}{b} \pm \frac{2a^2}{b^2} + \frac{5a^3}{4b^3} \pm \frac{2a^4}{b^4}\right)$ ad unitatem. Quod erat alterum.

Corollarium Primum.

Quod ſi pariter accipiatur differentiæ totius dimidium, & poſitiva ſigna conjunctioni, oppoſitioni vero negativa reſpondere intelligantur, erit velocitas Planetæ in quadraturis ad differentiam velocitatis in conjunctione ut

$1 : \frac{a}{M.b}\left(1 + \frac{3a}{2b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{5a^3}{8b^3} + \frac{a^4}{b^4}\right)$, & ad velocitatis differentiam in oppoſitione ut $1 : \frac{a}{M.b}\left(-1 + \frac{3a}{2b} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{5a^3}{8b^3} - \frac{a^4}{b^4}\right)$.

Quare ſi inferior Planeta immobilis ſtatuatur, & Planetæ ſuperioris motus referatur ad immobile centrum virium, atque ita convergant ſeries ut differentia velocitatis primis dumtaxat ſerierum terminis poſſit exprimi, accelerabitur quidem in conjunctionibus Planeta ipſe ſuperior, at in oppoſitionibus retardatio aliqua habebitur. Quod etiam manifeſtum eſt. Dum enim ab *r* ad *m* fertur, *fig.* 3, perpendiculum *OA* ex *A* in *Tm* demiſſum jacet ad partem illi oppoſitam, ad quam tendit Planeta.

Co-

Corollarium Secundum.

Si vero ipſe etiam Planeta attrahens, & inferior in orbe ſuo mobilis ſtatuatur, & tempora periodica ſint in ratione radiorum ſeſquiplicata, Planeta ſuperior a quadraturis ad conjunctionem tendendo antecedet Planetam inferiorem, ſubſequetur autem redeundo a conjunctione ad quadraturas. Vires igitur ab inferiore Planeta exercitæ in priore caſu retardabunt Planetam ſuperiorem, atque accelerabunt in caſu altero. Subſequetur etiam Planeta ſuperior inferiorem dum tendet a quadratura ad oppoſitionem, & perpendiculum *O A* jacebit rurſus ad eamdem partem, ad quam tendet Planeta ipſe, atque ita rurſus accelerabitur.

Corollarium Tertium.

Itaque ſi referamus Saturni motum ad immobile centrum virium totius ſyſtematis, Saturnus actione Jovis retardabitur in conjunctionibus, & in oppoſitionibus accelerabitur: & erit velocitas Saturni in quadraturis ad decrementum velocitatis in conjunctionibus Jovis in ratione compoſita $1 : \frac{578}{950000}\left(1 + \frac{156}{190} + \frac{2704}{9025} \&c\right)$, & motus angularis Jovis ad ſummam motuum angularium Jovis, & Saturni, juxta *Coroll.* 1., & 2. caſus hujus, & *Coroll.* 7. prioris caſus: ſive erit velocitas Saturni ad decrementum velocitatis in ratione compoſita 950000 : 1156, & 15 : 21.

S C H O L I O N.

Quia ob maximam Solis diſtantiam primus dumtaxat terminus feriei, quæ vires Lunæ perturbatrices exprimit, poteſt accipi, & Lunæ velocitas augetur in duplicata ratione ſinus diſtantiæ a quadratura; juxta illud Machinii theorema, quod demonſtravit Walmeslejus *par.* 3. de motu Apſidum, & *Propoſ.* 7. de inæqualitatibus motuum Lunarium,

 area,

area, quam Luna circa Terram describit, exhiberi poterit per aream circuli, & area, quam describeret circa Terram si nulla foret acceleratio, exhiberi poterit per aream ellipseos, cujus axis major sit ad minorem in subduplicata ratione velocitatis Lunæ in syzigiis, & quadraturis. Motus autem veri, & medii differentia fiet maxima in octantibus, & erit summa axium ellipseos ad axium differentiam ut radius ad sinum æquationis maximæ. Scilicet maxima Lunæ variatio erit in octantibus 32' 32", quæ aucta in ratione synodici temporis ad periodicum evadet 35' 10". Eadem methodo investigari posset variatio Satellitum Jovis, & Saturni, si posset evadere sensibilis. Aliorum vero Planetarum velocitas cum eamdem rationem minime sequatur, eodem modo exhiberi minime poterit. Patebit tamen accelerationis totius, ac retardationis ratio, quæ in conjunctionibus Jovis, & Saturni ab Astronomis detecta est.. Quinimo si consideremus velocitatis differentiam exiguam esse, adeoque intelligamus Planetas ipsos a suis orbitis minime recedere, sed circa conjunctionem dumtaxat celeriores, aut tardiores effici exhiberi etiam poterit aliquis accelerationis, & retardationis totius calculus. Ita quia per *Coroll.* 2. casus primi velocitas Jovis in quadraturis ad incrementum velocitatis in conjunctionibus Saturni sese habet ut 6698 : 1, si fiat ut 6698 : 1 ita 90° sive 5400' ad quartum, & quartus ipse numerus per *Coroll.* 7. augeatur in ratione 21 : 15, fiet tota angularis motus, & areæ circa Solem descriptæ acceleratio 1' 10". Simili modo per Corollarium idem septimum, & *Coroll.* 3. secundi casus, Saturni retardatio in conjunctionibus Jovis eruetur circiter 10'. Martis acceleratio in conjunctionibus Jovis non nisi 18" esse poterit, & differentia diurni motus, qui fere dimidii gradus est, evadet penitus insensibilis. Quæ cum observationibus Astronomicis singula satis conveniunt. Cum enim anno 1743 Jupiter, & Saturnus in signo Virginis mense Februario conjuncti essent, Cassinus die 21 mensis, 44' post quintam matutinam horam Saturni locum statuit 2° 15' 50" ipsius signi, cum juxta tabulas Astronomicas 2° 28' 28" esse debuisset. Die autem 28 Jupiter 5' 45" matu-

tutini temporis visus est in 9° 17' 33'', cum ex tabulis debuisset esse 9° 15'. Differentiam loci visi, & ex tabulis eruti, − 12' 38'' pro Saturno, & pro Jove + 2' 33'' Cassinus ipse majorem existimavit, quam ut in errorem, atque indiligentiam tabularum tota refunderetur. Vide Monumenta anni 1743 Regiæ Parisiensis Scientiarum Academiæ. Hinc vero patet actionem mutuam duorum Planetarum potiorem sibi differentiæ totius partem vindicasse. In Commentariis etiam Bononiensibus *par.* 3. *to.* 2. habemus diligentissimas Eustachii Manfredii observationes conjunctionis Heliocentricæ Martis, & Jovis, quæ die 29 Junii anno 1727 habita est. Et primo longitudines Martis ante, & post conjunctionem observationibus majores prodierunt quam ex tabulis. Ita quidem ut diebus 25 Maii, & 4, ac 5 Junii, quorum dierum observationes omnium accuratissimæ ipsi Manfredio visæ sunt, longitudo Martis 39'', 33'', 45'' major deprehensa sit quam juxta Wistoni tabulas esse oportebat. Observationum cum Cassinianis tabulis adhuc major dissensus patuit, & cum tabulis Hiræi dissensus fere idem fuit. Deinde motum diurnum Martis, qui juxta Wistoni tabulas 1° 24' 10'' duobus diebus conjunctionem antecedentibus debebat esse, & 1° 23' 52'' duobus aliis proxime subsequentibus, cum observationibus comparavit Manfredius ut dignosceret an Jovis actione Mars ante conjunctionem celerior, ac postmodum tardior evaderet. Juxta illas observationes, quas Martem primo ad Solem referendo instituit, motus duorum priorum dierum prodiit 1° 24' 14'', & 1° 22' 54'' motus duorum posteriorum. At juxta observationes alias Martis ad arcturum relati prodierunt bini motus 1° 24', & 1° 23' 34''. Differentiam nimis exiguam censuit Manfredius, quam ut attractioni Jovis tribueretur, eamdemque ex eo oriri posse animadvertit, quod quarta tantum parte unius secundi minuti temporis erratum sit in determinando vel Martis, vel arcturi transitu, sive etiam in horologio, aut murali instrumento corrigendo. Ex iis, quæ antea diximus, manifestum est differentias hasce omnes rejiciendas esse in errores exiguos tabularum vel observationum, & motum diurnum Martis nul-

E 2 lam

lam ſenſibilem alterationem attractione Jovis ſubire poſſe. Totius vero longitudinis viſæ, atque ex tabulis erutæ differentia dimidia fere attractioni Jovis debetur, reliqua defectui alicui obſervationum, aut tabularum. Inde etiam facili ratione deduci poſſet inclinationem orbitæ Martis ad Eclipticam actione Jovis ad ſenſum non immutari, & inæqualitates eas omnes latitudinis Martis, quas Manfredius in conjunctione Jovis deprehendit, obſervationum incertitudini dumtaxat tribui oportere. Sed de variatione inclinationis uniuſcujuſque orbitæ agemus poſtmodum.

Ca-

CAPUT TERTIUM.

De nodorum motu.

PROBLEMA TERTIUM.

SI plana duarum orbitarum ad ſe invicem inclinentur, determinare vim, qua Planeta attractus a plano ſuæ orbitæ diſtrahitur, & nodorum motum.

RESOLUTIO.

Eſto *B Q F b*, *fig.* 4., projectio orbitæ *B M P b* in Planum orbitæ Planetæ *A*, & ſit *B b* linea nodorum, *T A* linea ſyzigiarum, $w : 1$ ratio ſinus inclinationis duarum orbitarum ad ſinum totum, $\pi : 1$ ratio ſinus diſtantiæ *F T G* nodi, & Planetæ attrahentis pariter ad ſinum totum. Erit $\frac{FG \cdot AT}{FT}$, ſive πa perpendicularis *A g* ex *A* demiſſa in lineam nodorum, & erit $w \pi a$ perpendicularis *A a* ex *A* demiſſa in planum orbitæ *B P b*. Inſuper erit $a T = \sqrt{(a^2 - w^2 \pi^2 a^2)} = a \sqrt{(1 - w^2 \pi^2)}$, $a M = \sqrt{(a^2 - w^2 \pi^2 a^2 + b^2 \mp 2 a x \sqrt{(1 - w^2 \pi^2)})}$, $A M^3 = (a^2 + b^2 \mp 2 a x \sqrt{(1 - w^2 \pi^2)})^{\frac{3}{2}}$, aut quia eſt $\sqrt{(1 - w^2 \pi^2)} = 1 - \frac{1}{2} w^2 \pi^2$, ſi negligantur quadraticæ ipſius w poteſtates, adhuc cenſeri poterit $A M^3 = (a^2 + b^2 \mp 2 a x)^{\frac{3}{2}}$. Quare cum ſit $\frac{w \pi}{a^2}$ vis, qua punctum *T* trahitur perpendiculariter plano orbitæ, & vis, qua trahitur punctum *M*, ſit $= \frac{w \pi a}{A M^3}$; erit duarum virium differentia, ſi-

five vis punctum M perpendiculariter distrahens a plano orbitæ $= \frac{w\pi a}{(a^2 + b^2 \mp 2ax)^{\frac{3}{2}}} = \frac{w\pi}{a^2}$

Sit porro mn spatium, quod omnibus hujusmodi viribus a Planeta absolvi posset, quo tempore percurrit arcum Mm, *fig.* 5., dimidium scilicet illius spatii, quod eodem tempore absolveretur, si vires eædem omnes, per arcum Mm agentes, simul impressæ essent in loco M. Præsto est quod punctis M, T manentibus Planeta a loco M digressus post datum tempus ad n perveniet, & tota orbita circa MT veluti circa axem nutabit, atque in locum TMn transibit, & erit $Mm : mn$ ut BC ad arcum, quo punctum prioris nodi B supra orbitæ QFT planum elevabitur. Rursus erit is arcus ad arcum BL, quo retrocedet nodorum linea ut $w : 1$, & fiet $BL = \frac{BC.mn}{w.Mm} = \frac{MZ.mn}{w.Mm}$, & angularis nodorum motus $= \frac{MZ.mn}{w.MT.Mm}$ Est autem, *fig.* 6., $PG : PT = MH : Mv$, & $PG : TG = MH : Hv$, & $Tv = TH \mp Hv = TH \mp \frac{TG.MH}{PG}$, $vz = \frac{TG.TH}{PT} \mp \frac{TG^2.MH}{PG.PT}$, $\pm MZ = \pm vz + Mv = \frac{\pm TG.TH}{PT} - \frac{TG^2.MH}{PG.PT} + \frac{PT.MH}{PG} = \frac{PG.MH}{PT} \pm \frac{TG.TH}{PT}$. Quare cum terminus posterior in duobus quadrantibus RPT, rPT contrario signo destruatur, erit horarius nodorum motus $= \frac{PG.MH.mn}{w.PT^2.Mm} = \frac{\pm PG.mn.x}{bw.PT.Mm}$. Est autem motus horarius Planetæ in orbita sua ut $\frac{Mm}{TM}$, sive ut sinus versus arcus Mm directe, & arcus Mm reciproce, aut demum ut dimidia vis gravitatis directe, & reciproce ut arcus Mm. Quod si igitur quantitates materiæ in Planetis T, & A se habeant rursus ut $M : 1$, & gravitas Planetæ M in centrum sit $= \frac{M}{b^2}$, & pro ratione $PG : PT$ substituatur ratio $\pi : 1$, erit horarius Planetæ

tæ motus ad motum horarium nodorum ut

$$\frac{M}{b^2} : \frac{\pm a \pi^2 x}{b\left(a^2 \pm b^2 \mp 2ax\right)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{\pi^2 x}{b a^2}.$$

Poſitis hiſce omnibus ſi qui attrahitur Planeta centro totius motus propior ſit quam qui attrahit, & fractio, juxta caſum primum primi problematis, reſolvatur in ſeriem convergentem, negliganturque termini, qui ambiguo ſigno ſe deſtruunt, fiet horarius motus Planetæ ad motum horarium nodorum ut

$$\frac{M}{b^2} : \frac{3\pi^2 x^2}{b a^3} - \frac{15\pi^2 b x^2}{2a^5} + \frac{35\pi^2 x^4}{2b a^5} + \frac{105\pi^2 b^3 x^2}{8a^7} - \frac{315\pi^2 b x^4}{4a^7} + \frac{693\pi^2 x^6}{8b a^7}.$$

Si vero Planeta attrahens ſit inferior, atque ordinetur ſeries ut in caſu ſecundo problematis ejuſdem primi, motus horarii Planetæ attracti, & nodorum orbitæ inter ſe erunt ut.

$$\frac{M}{b^2} : \frac{3\pi^2 a^2 x^2}{b^6} - \frac{15\pi^2 a^4 x^2}{2b^8} + \frac{35\pi^2 a^4 x^4}{2b^{10}} \text{ \&c. Q. E. J.}$$

COROLLARIUM PRIMUM.

Si angulus *FTB*, *fig.* 4. non ſit major 180°, & corpus inter *R*, & *B*, aut *r*, & *b* reperiatur, *MH*, & *MZ*, *fig.* 5., contrariis ſignis afficientur, & nodi eadem progredientur directione cum Planeta *M*. Si Planeta deſcribat arcus *RPb*, *rB* regredientur nodi, & quieſcent dumtaxat dum reperientur nodi in ſyzigiis, aut quando nodis ubilibet conſtitutis Planeta in quadraturis nodorum, aut nodis ipſis reperietur, & ſit *FG*, *MH*, aut *MZ* = *o*. Integra tamen Planetæ ipſius revolutione nodorum motus fiet in antecedentia, ſive a centro motus remotior, ſive etiam propior ſit Planeta attrahens.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Juxta priorem caſum problematis ſi nodi ſint in quadraturis, & Planeta *M* in ſyzigiis, hoc eſt ſi ſit $\pi = 1$, & x

$-b$

$=b$, erit motus horarius maximus nodorum $= \frac{3b}{a^3} - \frac{15b^3}{2a^5} + \frac{35b^3}{2a^5} + \frac{105b^5}{8a^7} - \frac{315b^5}{4a^7} + \frac{693b^5}{8a^7} = \frac{3b}{a^3} + \frac{10b^3}{a^5} + \frac{21b^5}{a^7}$. Si nodi in quadraturis, & Planeta ipſe extra ſyzigias ubilibet reperiatur, fiet horarius nodorum motus $= \frac{3x^2}{ba^3} - \frac{15bx^2}{2a^5} + \frac{35x^4}{2ba^5} + \frac{105b^3x^2}{8a^7} - \frac{315bx^4}{4a^7} + \frac{693x^6}{8ba^7}$: & motus medius nodorum pro integra Planetæ ejuſdem revolutione prodibit $= \frac{3b}{2a^3} - \frac{15b^3}{4a^5} + \frac{105b^3}{16a^5} + \frac{105b^5}{16a^7} - \frac{945b^5}{32a^7} + \frac{3465b^5}{128a^7} = \frac{3b}{2a^3} + \frac{45b^3}{16a^5} + \frac{525b^5}{128a^7}$. In caſu altero erit horarius maximus nodorum motus $= \frac{3a^2}{b^4} + \frac{10a^4}{b^6} + \frac{21a^6}{b^8}$: & motus medius $= \frac{3a^2}{2b^4} + \frac{45a^4}{16b^6} + \frac{525a^6}{128b^8}$.

Corollarium Tertium.

In utroque autem caſu motus horarius medius nodorum, qui ſingulis Planctæ attracti revolutionibus reſpondebit, dum nodi reperientur in quadraturis Planetæ attrahentis, erit ad motum medium pro aſpectu alio quolibet nodorum, & loco Planetæ A, ut $1 : \pi^2$. Quare ſi ipſe etiam Planeta attrahens in orbe ſuo moveri intelligatur, & accipiatur medium mediorum omnium, ſcilicet ſi pro π^2 ſcribatur $\frac{1}{2}$, erit in primo caſu motus horarius corporis ad motum vere medium nodorum ut $\frac{4a^3 M}{b^2} : 3b + \frac{45b^3}{8a^2} + \frac{525b^5}{64a^4}$.
In caſu altero erunt horarii iidem motus inter ſe ut $4b^2 . M : 3a^2 + \frac{45a^4}{8b^2} + \frac{525a^6}{64b^4}$.

Co-

COROLLARIUM QUARTUM.

Si numeri substituantur speciebus, & primus dumtaxat seriei terminus spectetur, erit motus horarius Saturni ad motum horarium nodorum in plano Jovialis orbitæ ut $4b^2 . M : 3a^2 = 361 : 0.09213552$, & si pro motu horario Saturni substituantur 360°, sive $1296000''$ fiet tota Saturni revolutione nodorum motus $= \frac{116916.763382''}{361} = 324\frac{3}{4}''$. Est autem primus seriei terminus ad secundum ut $8b^2 : 15a^2 = 1805 : 1014$, & secundus ad tertium ut $72b^2 : 105a^2 = 5415 : 2366$. Quare si pro secundo termino $182''$, & $79''$ pro tertio addantur, prodibunt $586''$, & singulis seriei terminis celerius semper decrescentibus totus nodorum motus una Saturni revolutione censeri poterit rotundo numero $600''$, & annis singulis $20''$ fixarum respectu in antecedentia. At stellæ fixæ annis singulis punctorum æquinoctialium respectu progrediuntur in consequentia circiter $51''$. Nodi igitur Saturni annis singulis in plano orbitæ Jovis circiter $31''$ progredientur.

COROLLARIUM QUINTUM.

Motus nodorum Jovis cum plano orbitæ Saturni, ipsius Saturni actione, erit tardior, & citius converget series, quæ exprimit motum ipsum, substitutisque numeris ut in *Coroll.* 1. *casus* 1. primi problematis, erit motus horarius Jovis ad motum horarium medium nodorum ut $3.6982249 : 0.0001377 + 0.0000772 + 0.0000336 = 3.6982249 : 0.0002485$, atque integra revolutione Jovis fiet motus ipse $= 87''$, & annis singulis $= 7\frac{1}{3}''$. Hic motus fixarum respectu cum sit retrogradus, nodi orbitæ Jovis cum plano orbitæ Saturni punctorum æquinoctialium respectu progredientur $43\frac{2}{3}''$ annis singulis. Eodem modo regressio annua nodorum Martis, & Veneris

in plano orbitæ Jovis, ipſius Jovis actione, invenietur 17", & 4", & annua nodorum progreſſio æquinoctii reſpectu fiet 34", & 47". Motus nodorum orbitæ Mercurii in plano Jovialis orbitæ omnino nullus cenſeri poterit.

COROLLARIUM SEXTUM.

Et quemadmodum Planetæ alii in planis immobilibus non feruntur, ita etiam planum Eclipticæ habebit motus ſuos, atque erit motus horarius Terræ ad motum horarium medium Eclipticæ ipſius cum plano orbitæ Jovis ut $4 . 52^3$, $100000 : 11121 \left(30 + \frac{45000}{8 . 52^2} + \frac{52500000}{64 . 52^4}\right) = 56243200000 : 358012$, & ſi rurſus pro motu horario Terræ in orbe ſuo ſubſtituantur 1296000", fiet regreſſio annua nodorum, quæ ex attractione Jovis proficiſcitur, = 8", poſito ſcilicet quod quantitates materiæ in Sole, & Jove ſe habeant ut 10000: 11. 121. Quod ſi maſſa Jovis cum Newtono ſtatuatur 9 . 37, evadet regreſſio eadem 6" 45'''. Similibus computationibus, ſi Saturni maſſa ſtatuatur 3 . 029, erit motus horarius Terræ ad motum horarium medium nodorum, qui actione Saturni gignitur, ut 342950000000:94665, & motus annuus nodorum Terræ cum plano orbitæ Saturni fiet circiter 22'''.

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Si in Marte eadem haberetur materiae quantitas, quae in Terra eſt, foret horarius motus Terræ ad motum nodorum Eclipticæ cum plano orbitæ Martis ut 13500000 : 35, & regreſſio annua nodorum evaderet 20'''. Si denſitates Terræ, & Martis eædem ſint, & quantitates materiæ eamdem proportionem voluminum ſequantur, imminuendus erit nodorum motus in ratione 65 : 100, & fiet annis ſingulis 13'''. Pariter ſi denſitas in Terra, ac Venere, & quantitas materiæ ſit eadem, ſicuti idem volumen eſt, erit horarius Terrae motus ad motum horarium nodorum Eclipticae cum plano or-

orbitæ Veneris ut $400000000 : 5\left(3 \cdot 49 + \frac{45 \cdot 49^2}{800} + \frac{525 \cdot 49^4}{64\,0000}\right) = 40000000 : 141$, & fiet regreſſio annua nodorum, quæ actioni Veneris reſpondet, $4 \frac{1}{2}''$.

COROLLARIUM OCTAVUM.

Si ob maximam Planetæ attrahentis diſtantiam a centro motus termini omnes ſeriei negligendi ſint praeter primum, erit motus horarius Planetae attracti ad motum horarium maximum nodorum ut $\frac{M}{b^2} : \frac{3b}{a^3}$, ſive accuratius ut $\frac{M}{b^2} : \frac{3b}{a^3} \sqrt{(1 - \pi^2)}$ In Luna cum habeatur caſus iſte, & ſit media inclinatio orbitæ ad Eclipticam $5^{\circ}\ 9'$, & motus horarius $32.941057'$, erit $33''\ 2'''\ 48^{\text{iv}}\ 37^{\text{v}}$ motus horarius maximus nodorum, qui ſcilicet habetur quando Luna in ſyzigiis cum Sole, & nodi in quadraturis reperiuntur. Motus autem mediocris pro aſpectu eodem nodorum, & integra Lunae revolutione dimidius erit motus maximi, & fiet $= 16''\ 31'''\ 24^{\text{iv}}\ 18^{\text{v}}$. Denique motus medius pro loco, & aſpectu quolibet nodorum adhuc dimidius erit, videlicet $8''\ 15'''\ 42^{\text{iv}}\ 9^{\text{v}}$.

SCHOLION.

Haec, quae ad Lunae theoriam pertinent, breviter attigimus, ut innoteſceret Propoſitionem totam XXX. *lib.* 3. *Princip. Mathem.* Newtoni peculiare corollarium eſſe Problematis hujus noſtri. Walmeslejus *Propoſ.* IX. de inaequalitatibus motuum Lunarium adeo nitide expoſuit caetera, quae motum nodorum Lunaris orbitae reſpiciunt, & duo Machinii theoremata, quibus motus medius Solis, & Lunae a nodo definitur, facile adeo demonſtravit, ut nihil hacce in re amplius deſiderari poſſe videatur. Ut igitur ad Planetas alios redeamus, Eulerus in praeclara diſſertatione de inaequalitatibus Jovis, & Saturni §. LXXXVII, methodo illa uſus, de qua initio nonnulla attigimus, invenit lineam nodorum orbitae

Saturni cum plano orbitae Jovis regredi annis singulis 18" respectu fixarum, & 33" punctorum Æquinoctialium respectu progredi. Deinde §. xc. motum annuum nodorum orbitae Jovis cum plano orbitae Saturni, atque orbitarum Martis, & Veneris cum orbita Jovis statuit fixarum respectu 10", 15", 5". Tum etiam animadvertit sic definitos motus nodorum Saturni, & Martis in plano orbitae Jovis cum tabulis Astronomicis apprime congruere. At vero, ut notat Caillius *num.* 516. Lectionum Astronomicarum, cum qui ante saeculum 16 floruerunt Astronomi perpaucas nobis, & parum accuratas observationes de Apheliorum, & nodorum motu reliquerint, difficile admodum est motus ipsos observationibus sic definire ut pateat qui observationum, & theoriae consensus sit. Idcirco cum regressiones annuas nodorum modo definiremus extremos calculos cum observationibus Astronomicis minime comparavimus. Nobis hacce in re sufficit supputationes nostras cum Eulerianis quam maxime convenire. Differentia enim omnis, quae 2" non superat, major censeri nequit quam ut tribuatur differentiae elementorum, quae in instituendis calculis adhibentur. Eulerus insuper in Monumentis anni 1754 Regiae Berolinensis Scientiarum Academiae in dissertatione de variationibus latitudinis fixarum, & obliquitatis Eclipticae *num.* xxii. motum nodorum Eclipticae cum planis orbitarum Saturni, Jovis, Martis, & Veneris definivit 22''', 6" 57''', 5''', 5" 20''' annis singulis. Methodum utique minime exposuit Eulerus, qua ad conclusiones hujusmodi pervenit. Gaudemus tamen calculi nostri, & Euleriani rursus tantum consensum esse, nec dubitamus Euleri methodum ampliorem nostra, & praestantiorem esse. Major etiam invenietur consensio utriusque calculi, quia nos quidem densitatem eamdem Martis, Veneris, & Terrae, ac materiae quantitates voluminibus proportionales statuimus, Eulerus autem *num.* xxi. animadvertit densiores esse oportere Planetas Soli viciniores: quod etiam a Newtono notatum est, cum in *Coroll.* 4. *Prop.* 8. *lib.* 3. *Princip.* notas jam, atque ex Satellitum motu erutas densitates Terrae, Jovis, & Saturni compararet inter se invicem,

cem. Atque id rationi admodum est consentaneum. Quoniam enim aqua nostra, quae in Saturno rigesceret, in orbe Mercurii in vapores abiret aucti caloris vi, dubitandum non est ad calorem magis accomodatos esse Planetas propiores Soli, adeoque esse etiam densiores, cum materia omnis densior, ut observat Newtonus, ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat. Eulerus etiam cum easdem Planetarum trium densitates, quae notae sunt, cum distantiis mediis a Sole contulisset, arbitratus est eam legem erui, quod densitates sequantur rationem subduplicatam mediorum motuum, qui eidem tempori respondent, sive reciprocam subduplicatam temporum periodicorum. Juxta hanc legem augendo densitatem Veneris, & Martis densitatem minuendo, supputationibus iisdem nostris prodibit annuus motus nodorum Eclipticae cum planis orbitae Veneris, & Martis $5''$ $25'''$, & $9'''$. Si densitas Mercurii, & quantitas materiae simili modo investigetur, instituaturque ut supra calculus, fiet annuus motus nodorum Eclipticae cum plano orbitae Mercurii duorum tertiorum circiter.

Ca-

CAPUT QUARTUM.

De varia inclinatione Orbitarum inter se.

PROBLEMA QUARTUM.

DAto nodorum motu invenire variationem inclinationis duarum orbitarum inter ſe.

RESOLUTIO.

Sit recta VT, *fig.* 7., lineæ nodorum Bb perpendicularis, QT perpendicularis radio vectori MT, & QD perpendicularis ex Q demiſſa in VT. Ex puncto T elevetur TO perpendicularis plano orbitæ BMb, quæ ſit radio MT æqualis, & majoris perſpicuitatis gratia motus totius plani ex motu ipſius perpendicularis æſtimetur. Manentibus omnibus ut ſupra, planum omne BMb ob vim perturbatricem circa radium MT nutabit, atque erit nodorum motus ad arcum, quo punctum B recedet a plano orbitæ Planetæ attrahentis ut $1:w$, & arcus a puncto B circa MT deſcriptus erit ad arcum Oo, quem eodem tempore deſcribit perpendicularis erectæ extremum ut $BC:OT$, ſive ut $BZ:BT$. At vero quia minimo quocumque tempore motus Oo, veluti rectilineus ſpectari poteſt, & ſit ſecundum rectam QT, reſolvi poterit in duos alios ſecundum TV, & Tb, atque erit ad motum, qui ſecundum TV fiet, & quo orbita BMb circa lineam nodorum Bb nutabit, ut $TQ:TD$, ſive ut $MT:TZ$. Eſt enim angulus QTM æqualis angulo VTB, adeoque communem angulum VTM detrahendo ſupererunt æquales anguli QTV, MTB. Quare compoſitis rationibus erit nodorum motus ad motum variationis inclinationis ut $MZ:w.TZ$.

Jam vero ob $Tv = TH \mp \frac{TG.MH}{PG}$, & $PT:PG = Tv:TZ$,

erit

erit $\pm TZ = \pm \frac{TH.PG}{PT} - \frac{TG.MH}{PT}$. Omiſſo igitur priore termino, qui in duobus quadrantibus ambiguo ſigno deſtruitur, erit horarius nodorum motus ad variationem horariam inclinationis ut $MZ : w.TZ = \frac{PG.MH}{PT} : w. - \frac{TG.MH}{PT} = \pm x.\pi : \mp x.w.\sqrt{(1-\pi^2)} = \pi : -w.\sqrt{(1-\pi^2)}$. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Dato loco Planetæ attrahentis, per *Coroll.* 2. *Probl.* 3., eſt motus horarius medius nodorum, qui ſingulis Planetæ attracti revolutionibus reſpondet ut $\frac{3b}{2a^3} + \frac{45b^3}{16a^5} + \frac{525b^5}{128a^7}$, aut $\frac{3a^2}{2b^4} + \frac{45a^4}{16b^6} + \frac{525a^6}{128b^8}$ ductum in π^2, prout ſcilicet Planeta attrahens aut ſuperior, aut inferior eſt quam qui attrahitur. Media igitur variatio horaria inclinationis in caſu utroque iiſdem ſeriebus definietur ductis in $-w.\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$. Et quia rectangulum $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ nullum eſt in ſyzigiis, & quadraturis nodorum, in octantibus autem maximum; etiam variatio media inclinationis, quæ ſingulis Planetæ attracti revolutionibus reſpondet, nulla erit ſi Planeta attrahens aut in nodorum linea reperiatur, aut inde diſtet integro quadrante, atque in octantibus nodorum fiet maxima, in locis vero hinc inde æqualiter diſſitis ab octantibus manebit eadem.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si ipſe etiam Planeta attrahens in orbe ſuo moveri intelligatur, & primum a nodo b ad lineam quadraturarum VT tendat, minuetur ſemper media inclinatio orbitæ Planetæ attracti, attrahentiſque. Deinde vero dum a quadraturis progredietur ad nodum alterum, rectangulum $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ fiet negativum, augebitur iiſdem gradibus inclinatio quibus antea decreverat, & dum Planeta deveniet ad nodum B re-

reſtituetur in gradum priſtinum. Quo autem tempore a nodo tranſibit ad quadraturas erit ſumma motuum omnium nodorum ad variationem totam inclinationis ut ſumma omnium π^2 ad ſummam totidem $-w\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$, ſive ut $\frac{1}{8}\Delta : -\frac{1}{2}w = \Delta : -4w$. Quare erit variatio maxima inclinationis $\frac{6bw}{\Delta a^3}\left(1+\frac{15b^2}{8a^2}+\frac{175b^4}{64a^4}\right)$ in priore caſu, & in caſu altero $\frac{6a^2w}{\Delta b^4}\left(1+\frac{15a^2}{8b^2}+\frac{175a^4}{64b^4}\right)$.

Corollarium Tertium.

Si Planetæ attrahentis diſtantia infinita ſit, & negligi poſſint de more termini omnes feriei præter primum, erit motus horarius nodi B ad motum horarium maximum, qui habetur nodo in quadraturis Planetæ attrahentis, & Planeta M in ſyzigiis conſtituto ut $MH.MZ.PG:MT^3$, adeoque variatio horaria inclinationis erit ad motum horarium maximum nodorum ut $w\sqrt{(1-\pi^2)}.TZ.MH:MT^2$: & ſi nodi ſint in quadraturis ut $w.TH.MH:MT^2$. In hoc igitur caſu, manente loco Planetæ attrahentis, variatio horaria inclinationis fiet maxima dum Planeta M erit in octantibus, & imminuetur dum Planeta ipſe a quadratura ad ſyzigias cum illo tendet: deinde vero dum progredietur ad quadraturam alteram, & TH negativa evadet, aucta iiſdem gradibus inclinatio redibit ad ſtatum priſtinum.

Corollarium Quartum.

Summa variationum omnium horariarum inclinationis dum eodem manente nodorum loco a quadraturis ad ſyzigias Planeta M progredietur, erit ad ſummam totidem maximorum motuum nodorum, ut ſumma omnium $w.TH.MH$ ad ſummam totidem MT^2, ſive ut ſumma omnium $w.MT.MH.Hb$ ad MT^2 ductum in quadrantem circuli, aut de-

denique ut $\frac{1}{2}w . MT^3$ ad MT^2 per quadrantem circuli multiplicatum, ſcilicet in ratione compoſita coſinus inclinationis orbitæ ad ſinum totum, & diametri ad peripheriam: quod eſt *Coroll.* 4. *Prop:* 34. *Lib.* 3. *Princip. Mathem.* Newtoni. Pro qualibet nodorum poſitione erit variatio horaria inclinationis ad motum horarium maximum nodorum ut $-w . \pi \surd(1-\pi^2) . MH . Hb \pm w \surd(1-\pi^2) . TH . Hb : MT . Tm$.

Corollarium Quintum.

Quare ſi nodi, & Planeta horis ſingulis elapſis reſtituerentur in locum ſuum, & nodorum locus una Planetæ revolutione maneret idem, tota inclinationis variatio, tempore unius revolutionis genita, eſſet ad motum maximum nodorum ut ſumma omnium $w \pi \surd(1-\pi^2) . MH . Hb$ ad $MT . Mm$, ſive ut $w \pi \surd(1-\pi^2)$ ductum in peripheriam ad Mm ductum in diametrum: quod eſt *Coroll.* 2. *Prop.* 34. *Lib.* 3. Et cum ſumma omnium variationum inclinationis ad variationem horariam mediocrem ſe habeat ut tota peripheria ad Mm; dato nodorum loco mediocris variatio horaria, ex qua, per totam revolutionem uniformiter continuata, tota illa inclinationis variatio poſſet gigni, eſſet ad motum nodorum maximum ut $w \pi \surd(1-\pi^2) : 2$: quod eſt tertium Newtoni Corollarium.

Problema Quintum.

Data variatione inclinationis Eclipticæ cum orbitis aliorum omnium Planetarum, invenire variationem inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris.

Resolutio.

Eſto, *fig.* 8., Bb linea nodorum, & B nodus aſcendens orbitæ Planetæ alterius cum Ecliptica, Pr ſit interſectio

 Ecli-

Eclipticæ, & Æquatoris, & $\mathcal{P}$ referat primum Arietis punctum, & puncta $\mathcal{P}$, M, R, p secundum signorum ordinem se excipiant. Tum, juxta problema quartum nodi B motus in plano alterius orbitæ erit ad motum poli Eclipticæ circa vectorem radium MT ut $MZ:w\,.\,BT$, & motus poli Eclipticæ secundum rectam QT fiet, & in duos alios resolvi poterit secundum Qq, Tq. Motus insuper Poli Eclipticæ circa MT, & secundum TQ erit ad motum, qui secundum Tq, & circa lineam $\mathcal{P}p$ fiet, quo scilicet inclinatio Eclipticæ, & Æquatoris variabitur, ut $TQ:Tq$, sive ut $TM:TN$. Anguli enim QTM, $\mathcal{P}Tr$ sunt recti, & detracto utrimque communi $\mathcal{P}TQ$ supersunt æquales anguli QTr, $MT\mathcal{P}$. Itaque erit nodorum motus ad variationem inclinationis Eclipticæ ut $MZ:w\,.\,TN$. Est vero $TN = Cos.\ MT\mathcal{P} = Sin.\ MTB\,.\,Sin.\ \mathcal{P}TB + Cos.\ MTB\,.\,Cos.\ \mathcal{P}TB =$ $\frac{MZ\,.\,BX + TZ\,.\,TX}{BT}$. Quare neglecto termino $TZ\,.\,TX$, qui per totum semicirculum $b\mathcal{P}B$ contrariis signis destruitur, erit motus nodorum Eclipticæ cum plano orbitæ Planetæ alterius ad variationem inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris ut $MZ:w\,.\,\frac{MZ\,.\,BX}{BT} = BT:w\,.\,BX$. Q. E. J.

Corollarium Primum.

Si nodus ascendens B sit in signis Borealibus Eclipticæ, regredi non poterit in plano orbitæ Planetæ alterius nisi Æquatori propius accedendo: contra vero, si sit in signis Australibus, regrediendo recedet semper ab Æquatore. Itaque in primo casu motus inclinationis, qui fit circa lineam $\mathcal{P}p$, obliquitatem Eclipticæ imminuet, augebitque in casu altero. Porro sæculi hujus initio erant nodi ascendentes Saturni, & Jovis in signo Cancri 21° 13' 29", & 7° 29' 53", nodus ascendens Veneris in signo Geminorum 13° 59' 25", & nodi ascendentes Martis, & Mercurii in signo Tauri 17° 17' 25", & 14° 43'. Exscripsimus nodorum loca ex Lectionibus Astronomicis Caillii, ex quibus etiam sequentes mensu-

ſuras omnes accipiemus. In ea igitur poſitione orbitarum, quæ modo eſt, conſpirant vires planetarum omnium ad imminuendam obliquitatem Eclipticæ, & Æquatoris.

Corollarium Secundum.

Si motum medium annuum nodorum Saturni, & Jovis cum plano Eclipticæ ſtatuamus 22‴, & 8″, ut in *Coroll. 6. Probl.* 3., & ſæcularem motum 37″, & 800″, & ſit w ſinus inclinationis Jovialis orbitæ ad Eclipticam; quia nodi utriuſque orbitæ parum diſtant a ſe invicem, & inclinatio orbitæ Saturni fere dupla eſt inclinationis orbitæ Jovis, utraque autem ſatis exigua eſt, variatio tota inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem, quæ integro ſæculo ex Jove ſimul, & Saturno oritur, cenſeri poterit $= 800''. w . \frac{BX}{BT} + 37''. 2w . \frac{BX}{BT} = 874''. w . \frac{BX}{BT}$. Eſt autem w ſinus $1^\circ\ 19'\ 30'' = 0.023$ circiter, & $874''. w = 20''$. Rurſus eſt $\frac{BX}{BT}$ ſinus $82\frac{1}{2}^\circ = 0.9914449$. Fiet igitur ſæcularis variatio $19\frac{4}{5}''$. Si motus annuus nodorum Jovis ſtatueretur 6″ 45‴, ut prodiit ex altera maſſæ Jovis determinatione, fieret variatio eadem circiter 17″.

Corollarium Tertium.

Pariter ſi motus annuus nodorum Veneris cum Ecliptica ſit 5″ 25‴, ut in fine ſcholii ſuperioris, & integro ſæculo 542″, quia inclinatio orbitæ Veneris ad Eclipticam eſt 3° 23′ 20″, cujus ſinus = 0.059, & longitudo nodi aſcendentis 73° 59′ 25″, cujus ſinus = 0.96 circiter, erit 30.7″ ſæcularis variatio obliquitatis Eclipticæ, quæ ex vi Veneris ortum ducet. Denique cum inclinatio orbitarum Mercurii, & Martis ad Eclipticam ſit 7°, & 1° 50′ 54″, nodorum motus integro ſæculo 3″, & 15″, longitudo nodi aſcendentis 44° 43′, & 47° 17′, erit 2″ circiter ſæcularis variatio, quæ

G 2 ex

ex conjunctis viribus Mercurii, & Martis orietur. Quare variatio omnis, quæ ex viribus Planetarum omnium superiorum, inferiorumque integro sæculo ortum ducit, censeri poterit rotundo numero 50''.

Corollarium Quartum.

Si ineunte anno 1750 Eclipticæ obliquitas æstimetur 23° 28' 19'', ut eam in tabulis Astronomicis statuit Cl. De la Caille, fiet exeunte hoc sæculo 23° 27' 54'', & pro initio hujus sæculi statuenda erit 23° 28' 44''. Hoc posito ad datum quodcumque tempus, Planetarum nodis suo semper loco manentibus, supputari poterit Eclipticæ obliquitas. Ita noni sæculi initio eruetur 23° 35'', & Albategnii tempore, sive anno post Christum natum 750, prodibit 23° 36', & 23° 45' tempore Pytheæ, sive annis 300 ante Christum. Hæc pro iisdem temporibus censeri poterit media Eclipticæ obliquitas, neglectis scilicet æquationibus aliis, quæ ex nutatione terrestris axis oriuntur, & dato quod nodi ascendentes Planetarum distantias suas a punctis Æquinoctialibus, & longitudines sensibiliter non mutent.

Corollarium Quintum.

Quia vero, & Planetarum nodi, & puncta Æquinoctialia fixarum respectu regrediuntur, & respectu punctorum Æquinoctialium nodi feruntur semper in consequentia, subsequentibus sæculis ea variationis pars, quæ pendet ex Venere augeri debet, & ea quæ ex Jove pendet imminui, sicuti elapsis sæculis contraria ratione & partem illam minorem, & majorem hanc esse oportuit. Et licet totum variationis discrimen sæculorum aliquot intervallo satis exiguum sit, si tamen longius progrediamur fiet denique sensibile. Ita cum juxta tabulas Astronomicas initio æræ vulgaris nodus ascendens Veneris fuerit in signo Tauri 19° 20', & nodus ascendens Jovis in signo Geminorum 13° 58', si instituatur ut supra calculus, variatio tota obliquitatis Eclipticæ

cæ, quæ primo æræ vulgaris fæculo refpondet, 6'' circiter minor prodibit, quam quæ refpondet fæculo noftro.

COROLLARIUM SEXTUM.

Quando nodi afcendentes orbitarum Jovis, & Veneris ad Auftralia figna pervenient, augebitur iifdem gradibus Eclipticæ obliquitas, quibus antea imminuta eft, & integra nodorum revolutione reftituetur in gradum priftinum. Viciffitudines omnes obliquitatis longiffima periodo complectentur. Siquidem motus nodi afcendentis Jovis, & Veneris a punctis Æquinoctialibus cum feptendecim fæculis fit circiter 21°, & 25°, tota nodi ipfius revolutio non abfolvetur, nifi fæculis 291, & 245, quorum dimidio augebitur Eclipticae obliquitas, & dimidio imminuetur. Vires autem Jovis, & Veneris ad immutandam obliquitatem præ aliorum omnium Planetarum viribus potiores funt.

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Variatio maxima, quæ ex Jove, & Venere oriri poteft, fieret integro fæculo circiter 18'', & 32'', & fæculis $145\frac{1}{2}$, & $122\frac{1}{2}$ evaderet 2619'', & 3920'', fi fcilicet nodi afcendentes femper in primis Cancri punctis permanerent. Eft autem fumma variationum omnium ad fummam variationum totidem maximarum ut fumma finuum omnium ad fummam totidem radiorum, vel ut radius ad quadrantem circuli, five ut dupla diameter ad peripheriam. Tota igitur variatio, quæ ex Jove, & Venere vere orietur, erit circiter $27\frac{3}{4}'$, & $41\frac{1}{2}'$. Quare duorum Planetarum nodis a fe invicem fere uno figno diftantibus, cenferi poterit limes variationis maximæ circiter 1°.

PRO-

PROBLEMA SEXTUM.

Iisdem positis invenire variationem punctorum Æquinoctialium, quæ ex viribus Planetæ alterius cujuslibet proficiscitur.

RESOLUTIO.

Positis omnibus ut antea, erit motus nodi ascendentis B ad motum illum poli Eclipticæ, qui secundum rectam TN fiet, & quo tota Ecliptica circa Rr veluti circa axem nutabit, ut $MZ:w.\,Qq=MZ:w.\,MN=BT:-w.\,TX$. Est enim $MN=\frac{BX.TZ-MZ.TX}{BT}$. Ita vero dum Eclipticæ planum circa lineam Rr feretur, puncta P, & p perpendiculariter recedent a priore plano, & alia fiet intersectio Eclipticæ, & Æquatoris. Motus autem poli Eclipticæ, & puncti P circa Rr idem erit, & motus puncti P erit ad motum punctorum Æquinoctialium ut sinus ad cosinum obliquitatis Eclipticæ, sive ut tangens obliquitatis Eclipticæ ad sinum totum. Itaque motus nodi ascendentis B erit ad motum punctorum Æquinoctialium in ratione composita $BT:-w.\,TX$, & tangentis obliquitatis Eclipticæ ad sinum totum. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si nodus ascendens B sit inter punctum Æquinoctii verni P, & puncta Solstitialia R, r, TX positiva erit, & puncta Æquinoctialia actione Planetæ alterius ferentur contra ordinem signorum: contra vero progredientur in consequentia si TX fiat negativa, & nodus ascendens B reperiatur puncta inter Solstitialia, & punctum Æquinoctii Autumnalis. In ea igitur positione orbitarum, quæ modo est, actione quidem Saturni, & Jovis imminuetur præcessio annua Æquinoctiorum, quæ ex Sole, & ex Luna oritur, actione vero aliorum Planetarum augebitur. Co-

Corollarium Secundum.

Quia nodi ascendentes Jovis, & Saturni a punctis Solstitialibus distant $7\frac{1}{2}^{\circ}$, & 21° $13'$, manentibus cæteris ut in *Coroll.* 2. superioris Problematis, & posita obliquitate Eclipticæ 23° $28\frac{1}{3}'$, fiet sæcularis motus punctorum Æquinoctialium ob vim Planetæ utriusque circiter $7''$. Ob vim aliorum Planetarum evadet fere $-21''$. Nodus enim ascendens Veneris antecedit punctum Solstitii æstivi 16° $1'$. Actione igitur Planetarum omnium regredientur singulis sæculis puncta Æquinoctialia circiter $14''$: quæ quantitas præ tota Æquinoctiorum præcessione, quæ annis singulis fit $50.\ 3''$, nimis exigua est, quam ut observationibus possit detegi.

Corollarium Tertium.

Subsequentibus sæculis minor fiet æquatio, quæ ex Venere, & major quæ ex Jove, & Saturno pendet: utraque vero eamdem periodum habebit, qua variatio obliquitatis Eclipticæ complectitur, nisi quod variationis hujus periodus a punctis Æquinoctialibus, illius vero a punctis Solstitialibus supputari debeat. Antecedentibus sæculis majorem esse oportuit æquationem quæ ex Venere, & minorem quæ ex duobus aliis Planetis oritur, & differentia omnis ad præcessionem annuam Æquinoctiorum proportionem sensibilem habere aliquando potuit. Ita si primo æræ vulgaris sæculo statuatur Eclipticæ obliquitas 23° $42'$, fiet æquationum duarum differentia integro sæculo $-58''$.

S C H O L I O N.

Habemus igitur ex theoria gravitatis erutam, ac diremptam quæstionem, quæ circa mutationem obliquitatis Eclipticæ Astronomos exercet. Cl. Monnierius in Præfatione In-

Institutionum Astronomicarum, cum argumenta, quæ hinc inde ex Astronomicis observationibus deduci solent, accurate explicasset, collegit iisdem observationibus non adhuc satis constare utrum Eclipticæ obliquitas imminuatur, nec ne. Id ego etiam diu sensi cum in toto gravitatis systemate nullam adhuc caussam deprehenderem, qua obliquitas imminueretur. Considerabam enim Pytheam, a quo Eclipticæ obliquitas 23° 51' statuta est, Solstitialem umbram Massiliæ ejusdem longitudinis invenisse, cujus Gassendus anno 1636: observationes alias, quæ in ipsa veluti Astronomiæ infantia institutæ sunt, & quibus Solstitialis, ac Meridiana Solis declinatio armillarum ope investigabatur, cum Ricciolio correctas, & refractionis ratione habita emendato errore Erathostenis, quem Hipparchus, & Ptolemæus retinuerunt, obliquitatem Eclipticæ exhibere 23° circiter cum dimidio: cæteras denique observationes, quæ post magnorum Quadrantium, Telescopiorum, & Dioptrarum usum sunt habitæ additis correctionibus omnibus, atque iis potissimum, quæ ex vario aspectu nodorum Lunæ, & nutatione axis terrestris pendent, inter se magis convenire. Eulerus in dissertatione de inæqualitatibus Saturni, & Jovis §. XCII. animadvertit primum actione aliorum Planetarum Eclipticæ planum dimoveri e loco suo: deinde in Commentariis Berolinensibus anni 1754 ex dato nodorum motu sæcularem imminutionem obliquitatis Eclipticæ investigavit. Walmeslejus etiam in Transactionibus Philosophicis argumentum idem nitide exposuit, quamvis eam tantum variationis partem considerasset, quæ ex Jove oritur. Supra argumentum ipsum per partes singulas perspicue, ac breviter quam fieri potuit explicatum est. Sunt autem præcipua capita: Obliquitatem Eclipticæ, Planetarum orbitis inter se positis ut modo sunt imminui singulis sæculis 48" circiter, aut 50", æquationem sæcularem subsequentibus sæculis majorem fieri oportere, & sæculis elapsis minorem fuisse: variationum omnium limitem unius fere gradus esse, eamdemque esse periodum, qua revolutio nodorum uniuscujusque orbitæ definitur. Ita de observationibus rectius judicium ferri poterit. In primis falsum est quod nonnulli

au-

authore Herodoto, atque ex veteri traditione Ægyptiorum afferuerunt Eclipticam fuisse aliquando Æquatori circulo perpendicularem. Falsum est etiam, quod Louvillæus in Actis Eruditorum Lipsiensium anni 1719 contendebat, Eclipticæ obliquitatem singulis sæculis integro minuto ita imminui, ut demum cum Æquatore congruere debeat. Falsum est denique, quod nonnulli suspicabantur, differentiam obliquitatis Eclipticæ, aut tantam olim fuisse, aut tantam fore aliquando, ex qua aliæ tempestatum vicissitudines, aut fuerint, aut esse possint. Priores Pytheæ observationes non solum minus accuratæ sunt, sed etiam cum legibus naturæ minus conveniunt: cum Eclipticæ obliquitas iis temporibus 23° 42' minor fuerit, ut ex *Coroll.* 4., & 5. *Problem.* 5. præsto est; Albategnii autem, atque Arabum observationes, quæ altissimorum gnomonum ope instituebantur, tantæ indiligentiæ accusari nequeunt. Albategnius obliquitatem Eclipticæ definivit 23° 35'. Arabes alii Thebit, & Mahmud annis æræ vulgaris 901, & 992 ipsam statuerunt 23° 33 $\frac{1}{2}$', & 23° 32 $\frac{1}{3}$'. Id theoriæ conforme esse Eulerus animadvertit in dissertatione de obliquitate Eclipticæ num. XXVI: quamvis antecedente numero indicaverit calculum omnem precariæ, atque incertæ hypothesi inniti quod eadem semper fuerit inclinatio orbitarum Jovis, & Veneris ad Eclipticam. Et plane si inclinatio orbitarum major fuisset aliquando, quam modo est, major etiam prodiisset æquatio imminutæ inclinationis Eclipticæ ad Æquatorem. At vero in *Coroll.* 2. *Problem.* 4. observatum est eamdem semper manere inclinationem mediam Eclipticæ cum aliorum Planetarum orbitis, licet inclinatio Eclipticæ ad Æquatorem singulis sæculis fiat minor: unde etiam certius constat theoriæ cum observationibus Arabum consensus. Tycho, aliique Astronomi 16 sæculi Eclipticæ obliquitatem posuerunt 23° 31': quo etiam observationes Copernici reducuntur si 2' addantur ob refractionem. Elapso sæculo 23° 30', & 23° 29' deprehensa est. Ut unam ex observationibus omnibus seligamus, quae melioribus instrumentis peracta est, Flamsteedius mense Junio anni 1691 altitudinem meridianam

H lim-

limbi Solis superioris Grenovicii deprehendit 27° 45' 30", vel 27° 45' 35", limbi vero inferioris 28° 16' 55", vel 28° 17' : quarum altitudinem summa 56° 2' 25", vel 56° 2' 35", vel medium Arithmeticum sumendo 56° 2' 30" bifariam divisa altitudinem centri Solaris dabit 28° 1' 15", & erroribus instrumenti correctis 27° 59' 10", & parallaxi demum, ac refractionibus supputatis 27° 59' 37". Quia igitur in Grenoviciensi observatorio Æquatoris distantia a vertice est 51° 28' 30", fiet observata Eclipticae obliquitas 23° 28' 53" : & quia tunc temporis nodus ascendens Lunaris orbitae circa 20° Piscium reperiebatur, 8" subtrahendo ob nutationem terrestris axis, fiet obliquitas media 23° 28' 45". Quod si igitur pro anno 1750 statuatur cum Cl. Caillio 23° 28' 19", fiet variatio obliquitatis 26" singulis annis 59, & integro saeculo 44", ut etiam ab eodem Caillio in tabulis Astronomicis determinata est. Cassinus in elementis Astronomiae animadvertit variationem obliquitatis Eclipticae, quae 66 annis respondet, ex serie plurium observationum prodire 30", scilicet uno saeculo $45 \frac{1}{2}''$.

DE

DE INÆQUALITATIBUS PLANETARUM IN ORBITIS ELLIPTICIS LIBER SECUNDUS.

DE INÆQUALITATIBUS IN ORBITIS ELLIPTICIS

Caput Primum.

De viribus Planetarum in orbitis Ellipticis.

Lemma Primum.

Si in Ellipsi $ZPzp$, *fig.* 9., sit axis major $Zz = 2b$, minor $Pp = 2c$, excentricitas $TD = \varphi$, & centro T, ac radio TM, qui sit semiaxi majori æqualis describatur circulus $TMPMp$, & statuatur $TR = \pm u$; erit $CR^2 = b^2 - u^2 \pm 2\varphi u + \frac{\varphi^2 u^2}{b^2} - 2\varphi^2 \mp \frac{2\varphi^3 u}{b^2} + \frac{\varphi^4}{b^2}$, adeoque $TC^2 = b^2 \pm 2\varphi u + \frac{\varphi^2 u^2}{b^2} - 2\varphi^2 \mp \frac{2\varphi^3 u}{b^2} + \frac{\varphi^4}{b^2}$, & $TC = b \pm \frac{\varphi u}{b} - \frac{\varphi^2}{b}$. Est autem $TC : TM = TR : TN$. Erit igitur $\pm x = \frac{\pm b^2 u}{b^2 \pm \varphi u - \varphi^2}$, $b^2 \mp \varphi x = \frac{b^4 - b^2 \varphi^2}{b^2 \pm \varphi u - \varphi^2}$, & $\frac{bc^2}{b^2 \mp \varphi x} = \left(\frac{b^2 - \varphi^2}{b^2 - \varphi^2}\right)\left(\frac{b^2 \pm \varphi u - \varphi^2}{b}\right) = b \pm \frac{\varphi u}{b} - \frac{\varphi^2}{b} = TC$.

Pro-

Problema Primum.

Si Planeta in Ellipsi $ZCzC$ moveatur, *fig.* 10., & Planeta alius statuatur in loco A, determinare vires omnes perturbatrices.

Resolutio.

Quia si planetæ attrahentis massa unitate exprimatur vis tota ipsius secundum AC exercita est $=\frac{1}{AC^2}$, erit vis addita gravitati Planetæ C in focum $T=\frac{CT}{AC^3}$, & vis detracta gravitati $=\frac{AT.TO}{AT.AC^3}-\frac{TO}{AT^3}=\frac{AT.TH}{CT.AC^3}-\frac{TH}{CT.AT^2}$, & tertia vis directione sua radio vectori CT perpendicularis $=\frac{AT.AO}{AT.AC^3}-\frac{AO}{AT^3}=\frac{AT.CH}{CT.AC^3}-\frac{CH}{CT.AT^2}$. Jam vero est $\frac{TH}{CT}$ $=Cos.\ CTH=Sin.\ ATZ.\ Sin.\ CTZ+Cos.\ ATZ.\ Cos.\ CTZ$, & $\frac{CH}{CT}=Sin.\ ATZ\ Cos.\ CTZ-Cos.\ ATZ.\ Sin.\ CTZ$. Quare si ad vitandam confusionem fiat $TN=\pm x$, $MN=+-y$, & denotet $\pm x$ abscissas tam positivas, quam negativas, & $+-y$ utrasque semi-ordinatas tam positivis, quam negativis abscissis respondentes, ac fiat insuper $AT=a$, Sinus anguli $ATZ=m$, Cosinus $=n$, erit $\frac{TH}{CT}=\frac{+-my\pm nx}{b}$, & per lemma 1, $TH=(+-my\pm nx).\frac{c^2}{b^2\mp\varphi x}$, $CH=(\pm mx-+ny).\frac{c^2}{b^2\mp\varphi x}$, & vis gravitati addita evadet $=\frac{CT}{AC^3}=$

$$\frac{CT}{(AT^2-2AT.TH+TH^2+CH^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{CT}{(AT^2-2AT.TH+CT^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{bc^2}{(b^2\mp\varphi x)\left(a^2-\frac{2ac^2(\pm nx+-my)}{b^2\mp\varphi x}+\frac{b^2c^4}{(b^2\mp\varphi x)^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$ & vis

de-

detracta gravitati =

$$\frac{\pm anx + - amy}{b\left(a^2 - \frac{2ac^2(\pm nx + - my)}{b^2 \mp \varphi x} + \frac{b^2 c^4}{(b^2 \mp \varphi x)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mp nx - + my}{ba^2},$$

ac denique vis alia radio vectori perpendicularis =

$$\frac{\pm amx - + any}{b\left(a^2 - \frac{2ac^2(\pm nx + - my)}{b^2 \mp \varphi x} + \frac{b^2 c^4}{(b^2 \mp \varphi x)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mp mx + - ny}{ba^2}.$$

Q. E. J.

COROLLARIUM.

Ex posterioris formulæ contemplatione præsto est vim perpendicularem nullam esse quando Planeta C aut reperitur in recta AT, aut pervenit ad rectam aliam, quæ AT ad rectos angulos secat in puncto T. Est enim in hisce casibus $m:n = y:x$, & quantitates mx, ny contrariis signis afficiuntur. Patet etiam eadem vi perpendiculari augeri velocitatem projectionis quando x, & y negativa est, aut quando y negativa est, & mx major est quam ny, aut si sit y positiva, ny major maneat quam mx. In casibus contrariis contrarium accidit.

PROBLEMA SECUNDUM.

Si excentricitas orbitæ ellipticæ sit adeo parva, ut possint negligi plusquam quadraticæ ipsius potestates, determinare vim perpendicularem radio vectori.

RESOLUTIO.

Primo in denominatore postremæ formulæ antecedentis problematis, qua vis perpendicularis radio vectori definiebatur, si divisio instituatur more solito, & negligantur plus quam quadraticæ excentricitatis potestates, fiet

$- 2a$

$$-\frac{2ac^2(\pm nx+-my)}{b^2\mp\phi x}=\frac{2ac^2}{b^2}(\mp nx-+my)$$

$$-\frac{2ac^2\phi}{b^4}(nx^2\pm\mp mxy)+\frac{2ac^2\phi^2}{b^6}(\mp nx^3-+mx^2y)$$ &

$$\frac{b^2c^4}{(b^2\mp\phi x)^2}=\frac{c^4}{b^2}\mp\frac{2c^4\phi x}{b^4}+\frac{3c^4\phi^2x^2}{b^6}.$$

Tum vero ſi juxta binomii formulam in lemmate ſecundo lib. I. traditam denominator integer in ſeriem reſolvatur, accipiaturque $a^2+\frac{c^4}{b^2}+\frac{2ac^2}{b^2}(\mp nx-+my)$ loco termini prioris $\mathcal{P}$, & ſimiliter negligantur pluſquam quadraticæ excentricitatis poteſtates, vis perpendicularis expreſſio in hanc aliam degenerabit

$$\frac{\pm amx-+any}{b\mathcal{P}^{\frac{3}{2}}}\mp\frac{mx+-ny}{ba^2}-\frac{3ac^4\phi}{b^5\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(mx^2\mp\pm nxy)$$

$$+\frac{3a^2c^2\phi}{b^5\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(\pm mx-+ny)(nx^2\pm\mp mxy)-\frac{9ac^4\phi^2}{2b^7\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(\pm mx^3-+nx^2y)$$

$$+\frac{3a^2c^2\phi^2}{b^7\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}(\pm mx-+ny)(\pm nx^3+-mx^2y)+\frac{15ac^4\phi^2}{2b^9\mathcal{P}^{\frac{7}{2}}}(\pm mx-+ny)$$

$$(\pm c^2x-nax^2\mp\pm maxy)^2.$$ Q. E. J.

Corollarium Primum.

Si de Luna ſit ſermo, ob maximam Solis diſtantiam pro $\mathcal{P}$ ſcribi poterit a^2, & negligi poterunt alii omnes termini, in quibus quantitas a in denominatore poſita ſuperat tertiam dimenſionem. Hoc dato priores duo antecedentis formulæ termini ſe mutuo deſtruent, tertius autem, quintus, & ſeptimus evaneſcent ob parvitatem, & ſi pro c^2 ſcribatur b^2, tota vis perpendicularis, quæ æquabilem arearum Lunæ deſcriptionem perturbat, fiet =

$$\frac{3\phi}{b^3a^3}(\pm mx-+ny)(nx^2\pm\mp mxy)+\frac{3\phi^2}{b^5a^3}(\pm mx-+ny)$$

$$(\pm nx^3+-mx^2y).$$

Co-

Corollarium Secundum.

Si negligantur etiam ii termini, qui ob figni ambiguitatem fingulis revolutionibus fe mutuo deftruunt, fupererit pro vi tota perturbatrice $\frac{3\varphi^2}{b^5 a^3}(mnx^4 - mnx^2y^2)$. Ita fiet juxta lemma tertium *lib.* 1. vis media radio vectori Lunæ perpendicularis $= \frac{3mn\varphi^2}{ba^3}$: nulla erit fcilicet quando linea a Sole ad Terram ducta cum diametro tranfverfa, aut conjugata Lunaris orbitæ coincidet, & fiet m, aut $n = 0$. Hinc inde vero in octantibus erit maxima.

Corollarium Tertium.

Quando m, & n aut fimul pofitivæ, aut fimul negativæ erunt, quando nimirum Luna poft fyzigias cum Sole tendet ad quadraturas fuas cum linea Apfidum, vis perpendicularis radio vectori revolutione integra Lunam accelerabit, retardabit autem in ea Lunaris orbitæ pofitione, in qua Luna a Sole digreffa ad Aphelium fuæ orbitæ, aut ad Perihelium proficifcetur, & alterutra ex quantitatibus m, & n negativa erit. Singulis autem Apogæi revolutionibus fefe invicem vires mediæ compenfabunt in orbita elliptica, ficuti in orbita circulari fingulis revolutionibus Lunæ fefe invicem compenfare neceffe eft.

Corollarium Quartum.

Quod fi pro aliis Planetis alii etiam ferierum termini fupputentur, & negligantur qui ambiguo figno fe deftruunt, & medium ex aliis omnibus accipiatur, fiet vis media quæ æquabilem arearum defcriptionem perturbabit $=$ $-\frac{3\varphi^2 mn}{4ba^3}(1 + \frac{5b}{2a} \&c) + \frac{3b\varphi m}{8a^4}(1 + \frac{5b^2}{4a^2} \&c)$: quæ quidem evanefcet fimiliter quando Planeta attrahens in productione

 dia-

diametri tranſverſæ reperietur, non vero quando erit in diametro conjugata orbitæ ellipticæ.

Corollarium Quintum.

Quod ſi vero Planeta attrahens inferior ſit, & diſtantia ipſius a centro in numeratores ſerierum rejiciatur, & ſimili modo inſtituatur calculus, erit $-\frac{3a\varphi m}{2b^4}\left(1+\frac{5a^2}{8b^2}+\frac{5.7a^4}{8.8b^4}\right)$ vis media, quæ dato Planetæ attrahentis loco pro ſingulis Planetæ attracti revolutionibus reſpondebit. Quare neglectis aliis ſerierum terminis, ſi ille quidem in diametro tranſverſa maneat vis media nulla erit, at ſi in diametro conjugata reperiatur vis media maxime augebitur.

Problema Tertium.

Iiſdem poſitis determinare vim aliam, quæ demitur, & quæ adjicitur gravitati.

Resolutio.

Pars prior. Si in ſecunda formula *Probl.* 1. ſubſtitutiones eædem fiant, quæ in *Probl.* 2., evadet vis, qua imminuetur gravitas Planetæ in focum =

$$\frac{\pm anx +- amy}{bP^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{nx -+ my}{ba^2} - \frac{3^a c^4 \varphi}{b^5 P^{\frac{5}{2}}}(nx^2 \pm\mp mxy)$$

$$+\frac{3a^2c^2\varphi}{b^5 P^{\frac{5}{2}}}(\pm nx +- my)(nx^2 \pm\mp mxy) - \frac{9ac^4\varphi^2}{2b^7 P^{\frac{5}{2}}}(\pm nx^3 +- mx^2y)$$

$$+\frac{3a^2c^2\varphi^2}{b^7 P^{\frac{5}{2}}}(\pm nx +- my)(\pm nx^3 +- mx^2y) + \frac{15ac^4\varphi^2}{2b^9 P^{\frac{7}{2}}}(\pm nx +- my)$$

$(\pm c^2 x - nax^2 \mp\pm maxy)^2$. Quod erat primum.

Pars altera. Quia vero eſt $\frac{bc^2}{b^2 + \varphi x} = \frac{c^2}{b} \pm \frac{c^2\varphi x}{b^3} + \frac{c^2\varphi^2 x^2}{b^5}$, ſubſtitutionibus ſingulis in priore formula rite factis, prodibit

bit vis, quæ addetur gravitati =

$$\frac{b^4 c^2 \pm b^2 c^2 \varphi x + c^2 \varphi^2 x^2}{b^5 P^{\frac{3}{2}}} + \frac{3 c^4 \varphi}{b^5 P^{\frac{5}{2}}}(a n x^2 \pm\mp a m x y \mp c^2 x)$$

$$-\frac{3 c^4 \varphi^2}{2 b^7 P^{\frac{5}{2}}}(5 c^2 x^2 \mp 4 a n x^3 + 4 a m x^2 y) + \frac{15 c^6 \varphi^2}{2 b^9 P^{\frac{7}{2}}}(\pm c^2 x - n a x^2 \mp\pm m a x y)^2.$$

Quod erat alterum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si Planeta attrahens ſit ſuperior, atque ex formula prioris partis hujus Problematis ſubtrahatur formula ſecundæ partis, prodibit totum gravitatis decrementum, quod ex actione ſuperioris ipſius Planetæ oritur: & ſi ex formula ſecundæ partis ſubtrahatur formula partis prioris prodibit totale incrementum gravitatis, quod haberi debet ubi Planeta attrahens foco orbitæ ellipticæ propior ſit, quam qui attrahitur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Quod ſi eodem modo reſolvantur denominatores ſinguli in ſeries, & quantitates mediæ accipiantur, fiet in primo caſu decrementum medium gravitatis, quod dato Planetæ attrahentis, & ſuperioris loco, pro ſingulis Planetæ attracti revolutionibus reſpondet =

$$\frac{b}{2a^3} - \frac{5\varphi^2}{8ba^3} + \frac{9b^3}{16a^5} - \frac{15b\varphi^2}{16a^5} + \frac{3\varphi^2 n^2}{4ba^3} + \frac{9b\varphi n}{8a^4} + \frac{405 b\varphi^2 n^2}{16a^5} - \frac{315 b\varphi^2 m n}{16a^5} \text{ \&c.}$$

COROLLARIUM TERTIUM.

Decrementum igitur gravitatis evadet mediorum omnium decrementorum maximum quando Planeta attrahens cum Aphelio inferioris Planetæ conjungetur. In quadraturis cum ipſo Aphelio, & in oppoſitione, quando ſcilicet erit $n = -1$, minus fiet decrementum idem, quam in con-

junctione. In oppositione autem majus, aut minus esse poterit quam tempore quadraturarum prout $\frac{3\varphi^2}{4ba^3}$ majus aut minus erit quam $\frac{9b\varphi}{8a^4}$.

Corollarium Quartum.

Si Planeta attrahens tanto intervallo a foco distet, ut possint negligi fractiones omnes, in quibus occurrunt facta ex quantitatibus b, & φ plusquam unius dimensionis, fiet decrementum medium gravitatis $\frac{b}{2a^3} - \frac{5\varphi^2}{8ba^3} + \frac{3\varphi^2 n^2}{4ba^3}$, maximum scilicet quando Planeta ipse cum Aphelio, ac Perihelio orbitæ ellipticæ conjungetur, atque erit $n = \pm 1$, minimum vero in quadraturis, ubi evadit $n = 0$. Qui casus in Luna cum locum habeat, constat quod in scholio Lunaris theoriæ Newtonus asseruerat: *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis Lunaris transit per Solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea Terram, & Solem jungente*.

Corollarium Quintum.

In casu autem altero fiet medium gravitatis incrementum, quod ex actione Planetæ inferius positi proficiscitur $= \frac{1}{b^2} + \frac{3a^2}{4b^4} + \frac{45a^4}{64b^6} + \frac{5\varphi^2}{4b^4} + \frac{75a^2\varphi^2}{16b^6} - \frac{3a\varphi n}{b^4} - \frac{15a^3\varphi n}{4b^6} + \frac{39a^2\varphi^2 n^2}{8b^6}$ maximum scilicet evadet quando quantitas n erit $= -1$, quando scilicet Planeta attrahens, & inferior cum Perihelio orbitæ ellipticæ conjungetur. Quando eidem Perihelio opponetur Planeta attrahens, atque erit $n = 1$, gravitatis incrementum fiet minimum mediorum omnium: hinc inde vero in quadraturis vere medium permanebit.

SCHO-

SCOHLION.

In dissertatione illa, quam primo ad Regiam Parisiensem Scientiarum Academiam transmisimus, exposuimus seriem totius calculi, quo vires mediæ superiorum, inferiorumque Planetarum investigantur. Ipsius instituendi methodum, ac rationem lector percipiet ex subsequente capite, in quo pro supputandis mutationibus vis projectilis, similes formulæ evolvendæ, ac similiter reducendæ erunt. Hic, quoniam longissimus, & molestissimus est idem virium mediarum calculus, satis esse existimavimus formulas ultimo prodeuntes recensere, & corollaria quædam attingere, quæ ex formularum contemplatione deduci possunt. Alia etiam exinde profluunt. Data velocitate projectionis vires centripetæ cum sint reciproce ut radii, intelligitur facile iisdem auctis, aut imminutis coarctari, aut dilatari debere orbitam. Idcirco iis tantum viribus perturbatricibus spectatis, quæ gravitatem Lunæ in Terram minuunt, manifestum est Lunarem orbitam paulo ampliorem fieri quando transversa diameter per Solem transit: quod rursus fuit a Newtono observatum. Valet idipsum de orbitis aliorum Planetarum. Et quidem in Jove cum excentricitas sit circiter $\frac{1}{38}$ distantiæ mediæ Saturni a Sole, erit vis $\frac{b}{2a^3}$ ad vim $\frac{9b\,en}{8a^4}$ quando maxima est, ut 152 : 9, & cum vis $\frac{b}{2a^3}$ ex Saturno orta sit ad gravitatem Jovis in Solem ut 0.0000918 : 3.6982249, erit gravitas ipsa ad vim maximam pendentem ex loco Saturni, & Apsidum Jovis ut 680397 : 1. Jam vero ob æqualem aream dato tempore semper descriptam tempora periodica sunt in ratione duplicata diametrorum, & diametri sunt reciproce ut vires. Itaque si eædem vires dumtaxat agerent, forent periodica Jovis tempora Saturno primum ex parte Aphelii, deinde circa Perihelium Jovialis orbitæ constituto in duplicata ratione 680398 : 680396, & tempus maximum foret ad differentiam maximi, & mi-

& minimi ut 170099 : 1 circiter : quod differentiam motus medii circiter $7''$ singulis Jovis revolutionibus exhiberet. Quare cum una Jovis revolutione e plaga Aphelii, aut Perihelii Saturnus sensibiliter recedat, satis exiguæ erunt motus medii æquationes, quæ ex aucta, aut imminuta Planetarum Primariorum gravitate in focum orientur. Quia vires omnes secundum tangentem orbitæ exercitæ continue agunt Planetam accelerando, aut retardando, quæ ex mutatione vis projectilis emergent æquationes potiores erunt. Acceleratio autem, aut retardatio non tantum ex viribus radio vectori perpendicularibus, sed ex viribus simul, & tempore æstimandæ erunt: quod in sequente capite præstabimus.

Ca-

CAPUT SECUNDUM.

De acceleratione, & retardatione, quæ ex loco Planetæ attrahentis, & Apsidum Planetæ attracti pendet.

LEMMA SECUNDUM.

SI Mm, *fig.* 9., vocetur dz, erit $ct = \frac{dz}{b} \cdot \frac{bc^2}{b^2 \mp \varphi x} = \frac{c^2 dx}{b^2 \mp \varphi x}$, & Ct elementum rectæ CT erit $= \frac{\pm bc^2 \varphi dx}{(b^2 \mp \varphi x)^2}$, adeoque Cc $= \surd \left(\frac{c^4 dz^2}{(b^2 \mp \varphi x)^2} + \frac{b^2 c^4 \varphi^2 dx^2}{(b^2 \mp \varphi x)^4} \right) = \frac{c^2 dz}{b^2 \mp \varphi x} \surd \left(1 + \frac{\varphi^2 y^2}{(b^2 \mp \varphi x)^2} \right)$. Quare si negligantur plusquam quadraticæ excentricitatis φ potestates, & scribatur $b^2 - \varphi^2$ pro c^2, & $b^2 - x^2$ pro y^2, fiet elementum arcus elliptici $Cc = \left(1 \pm \frac{\varphi x}{b^2}\right) dz$.

PROBLEMA QUARTUM.

Dato loco Planetæ attrahentis determinare velocitatem, qua singulis Planetæ attracti revolutionibus projectionis velocitas augetur, aut imminuitur.

RESOLUTIO.

Si de Planetis Primariis sermo sit, quia vis omnis perturbatrix præ gravitate in focum longe minor est quam in Luna, & errores singuli magis exigui sunt, negligi poterunt etiam quadraticæ potestates excentricitatis. Hoc dato in formula Problematis secundi, qua vis perpendicularis radio vectori exprimebatur, quatuor dumtaxat priores termini considerandi erunt, cæteris ob parvitatem evanescentibus. Quia vero vis accelerans ducta in elementum spatii æquatur ve-

velocitati ductæ in elementum suum; ductis iisdem terminis in $(1 \pm \frac{\varphi x}{b^2})\, dz$, primo omitti poterit factum priorum duorum in dz, quod cum per nullam excentricitatis potestatem multiplicetur exprimet accelerationem Planetæ in orbita circulari, in qua quidem vires perpendiculares in oppositis punctis æquales sunt, & contrariæ, totaque revolutione se mutuo destruunt. Negligi etiam poterit factum duorum posteriorum, in quibus excentricitas ipsa occurrit, per $\pm \frac{\varphi x dz}{b^2}$.

Ita fiet

$$VdV = \pm \frac{\varphi x dz}{b^2}\left(\pm \frac{amx -+ any}{bP^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{mx +- ny}{ba^2}\right) - \frac{3a\varphi dz}{bP^{\frac{5}{2}}}(mx^2 \mp \pm nxy)$$
$$+ \frac{3a^2\varphi dz}{b^3 P^{\frac{5}{2}}}(\pm mnx^3 +- m^2x^2y -+ n^2x^2y \mp mnxy^2).$$

Ad hanc æquationem omnem evolvendam si primo denominator $P^{\frac{3}{2}}$ de more in seriem convertatur, & in binomii formula statuatur exponens potestatis indeterminatæ $= \frac{3}{2}$, $a^2 + \frac{c^4}{b^2} = a^2 + b^2 = R$, $\frac{2ac^2}{b^2}\left(\frac{\mp nx -+ my}{a^2 + b^2}\right) = \frac{2a(\mp nx -+ my)}{R} = Q$,

fiet

$$\frac{1}{P^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \frac{3a(\mp nx -+ my)}{R^{\frac{5}{2}}}$$
$$+ \frac{15a^2(\mp nx -+ my)^2}{2R^{\frac{7}{2}}}$$
$$- \frac{35a^3(\mp nx -+ my)^3}{2R^{\frac{9}{2}}}$$
$$+ \frac{315a^4(\mp nx -+ my)^4}{8R^{\frac{11}{2}}}$$

— 693.

$$-\frac{693\, a^5 (\mp n x -+ m y)^5}{8\, R^{\frac{13}{2}}}$$

$$+\frac{3003\, a^6 (\mp n x -+ m y)^6}{16\, R^{\frac{15}{2}}} \text{ \&c.}$$

Quod si deinde fiat exponens $= \frac{5}{2}$, erit $\frac{1}{R^{\frac{5}{2}}}$ primus terminus feriei, in quam $\frac{1}{\mathcal{P}^{\frac{5}{2}}}$ refolvitur. Poteftates quantitatis indeterminatæ $(\mp n x -+ m y)$ eædem erunt in fecunda ferie, quæ in prima, & dumtaxat conftantes coefficientes mutabuntur, eritque fecundi termini coefficiens $-\frac{5a}{R^{\frac{7}{2}}}$, tertii $\frac{35 a^2}{2 R^{\frac{9}{2}}}$, quarti $-\frac{105 a^3}{2 R^{\frac{11}{2}}}$, quinti $\frac{1155 a^4}{8 R^{\frac{13}{2}}}$, fexti $-\frac{3003 a^5}{8 R^{\frac{15}{2}}}$ &c.

Subftitutionibus hifce factis, neglectifque quantitatibus omnibus, quæ contrario figno fe deftruunt, fiet primus fuperioris æquationis terminus

$$= \frac{a \phi m x^2 dz}{b^3 R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\phi m x^2 dz}{b^3 a^2} + \frac{15 a^3 \phi dz}{2 b^3 R^{\frac{7}{2}}} (m^3 x^2 y^2 - 2 m x^2 x^2 y^2 + m n^2 x^4)$$

$$+ \frac{315 a^5 \phi dz}{8 b^3 R^{\frac{11}{2}}} (m n^4 x^6 - 4 m n^4 x^4 y^2 + 6 m^3 n^2 x^4 y^2 - 4 m^3 n^2 x^2 y^4 + m^5 x^2 y^4)$$

$$+ \frac{3003 a^7 \phi dz}{16 b^3 R^{\frac{15}{2}}} (m n^6 x^8 + 15 n^4 m^3 x^6 y^2 + 15 n^2 m^5 x^4 y^4 + m^7 x^2 y^6)$$

$$- \frac{3003 a^7 \phi dz}{16 b^3 R^{\frac{15}{2}}} (6 m n^6 x^6 y^2 + 20 n^4 m^3 x^4 y^4 + 6 n^2 m^5 x^2 \quad ^6)$$

quorum omnium fumma erit

$$= \frac{a \Delta \phi m}{2 R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta \phi m}{2 a^2} + \frac{15 a^3 b^2 \Delta \phi}{16 R^{\frac{7}{2}}} (m^3 + m n^2)$$

$$+ \frac{315 a^5 b^4 \Delta \phi}{128 R^{\frac{11}{2}}} (m n^4 + 2 m^3 n^2 + m^5)$$

K + 3003

$$+\frac{3003 a^7 b^6 \Delta \phi}{2048 R^{\frac{15}{2}}} (5 m n^6 + 15 n^4 m^3 + 15 n^2 m^5 + 5 m^7).$$

Eſt vero $n^2 = 1 - m^2$. Quare hac rurſus ſubſtitutione habita fiet eadem ſumma

$$= \frac{a \Delta \phi m}{2 R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta \phi m}{2 a^2} + \frac{15 a^3 b^2 \Delta \phi m}{16 R^{\frac{7}{2}}} + \frac{315 a^5 b^4 \Delta \phi m}{128 R^{\frac{11}{2}}} + \frac{15015 a^7 b^6 \Delta \phi m}{2048 R^{\frac{15}{2}}}.$$

Secundus etiam ipſius æquationis terminus ſimilibus ſubſtitutionibus prodibit

$$= -\frac{3 a \phi m x^2 dz}{b R^{\frac{5}{2}}} - \frac{105 a^3 \phi dz}{2 b R^{\frac{9}{2}}} (m n^2 x^4 - 2 m n^2 x^2 y^2 + m^3 x^2 y^2)$$

$$-\frac{3465 a^5 \phi dz}{8 b R^{\frac{13}{2}}} (m n^4 x^6 - 4 m n^4 x^4 y^2 + 6 m^3 n^2 x^4 y^2 - 4 m^3 n^2 x^2 y^4 + m^5 x^2 y^4)$$

quorum pariter ſumma eſt $= -\frac{3 a b^2 \Delta \phi m}{2 R^{\frac{5}{2}}} - \frac{105 a^3 b^4 \Delta \phi}{16 R^{\frac{9}{2}}} (m n^2 + m^3)$

$$-\frac{3465 a^5 b^6 \Delta \phi}{128 R^{\frac{13}{2}}} (m n^4 + 2 m^3 n^2 + m^5)$$

$$= -\frac{3 a b^2 \Delta \phi m}{2 R^{\frac{5}{2}}} - \frac{105 a^3 b^4 \Delta \phi m}{16 R^{\frac{9}{2}}} - \frac{3465 a^5 b^6 \Delta \phi m}{128 R^{\frac{13}{2}}}$$

Poſtremus denique ſuperioris aequationis terminus evadet

$$= \frac{15 a^3 \phi dz}{b^3 R^{\frac{7}{2}}} (m n^2 x^4 - 2 m n^2 x^2 y^2 + m^3 x^2 y^2)$$

$$+ \frac{315 a^5 \phi dz}{2 b^3 R^{\frac{11}{2}}} (m n^4 x^6 + 6 n^2 m^3 x^4 y^2 - 4 m n^4 x^4 y^2 - 4 m^3 n^2 x^2 y^4 + m^5 x^2 y^4)$$

$$+ \frac{9009 a^7 \phi dz}{8 b^3 R^{\frac{15}{2}}} (m n^6 x^8 + 15 n^4 m^3 x^6 y^2 + 15 n^2 m^5 x^4 y^4 + m^7 x^2 y^6)$$

$$- \frac{9009 a^7 \phi dz}{8 b^3 R^{\frac{15}{2}}} (6 m n^6 x^6 y^2 + 20 n^4 m^3 y^4 x^4 + 6 n^2 m^5 x^2 y^6)$$

& ſumma erit $= \frac{15 a^3 b^2 \Delta \phi}{8 R^{\frac{7}{2}}} (m n^2 + m^3)$

$$+ \frac{315\, a^3 b^4 \Delta \varphi (m n^4 + 2 n^2 m^3 + m^5)}{32 R^{\frac{11}{2}}}$$
$$+ \frac{9009\, a^7 b^6 \Delta \varphi (5 m n^6 + 15 n^4 m^3 + 15 n^2 m^5 + 5 m^7)}{1024 R^{\frac{15}{2}}}$$
$$= \frac{15\, a^3 b^2 \Delta \varphi m}{8 R^{\frac{7}{2}}} + \frac{315\, a^5 b^4 \Delta \varphi . m}{32 R^{\frac{11}{2}}} + \frac{45045\, a^7 b^6 \Delta \varphi m}{1024 R^{\frac{15}{2}}}$$

Quare collectis simul terminis omnibus habebitur

$$V^2 = C + \frac{a \Delta \varphi m}{R^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta \varphi m}{a^2} - \frac{3 a b^2 \Delta \varphi m}{R^{\frac{5}{2}}} + \frac{45 a^3 b^2 \Delta \varphi m}{8 R^{\frac{7}{2}}} - \frac{105 a^3 b^4 \Delta \varphi m}{8 R^{\frac{9}{2}}}$$
$$+ \frac{1575\, a^5 b^4 \Delta \varphi m}{64 R^{\frac{11}{2}}} - \frac{3465\, a^5 b^6 \Delta \varphi m}{64 R^{\frac{13}{2}}} + \frac{105105\, a^7 b^6 \Delta \varphi m}{1024 R^{\frac{15}{2}}}.$$

CASUS PRIMUS.

Si Planeta attrahens sit superior, denominator fractionum singularum ita in seriem converti debet, ut superioris Planetae distantia a foco denominatores novae seriei constituat. Tum enim series convergens erit, & primi tantum ipsius termini sumi poterunt. Accipiendi ex. gr. sint tantum priores tres, quorum scilicet denominatores sunt quarta, sexta, & octava potentia Planetae attrahentis, & fiat

$$\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^3} - \frac{3 b^2}{2 a^5} + \frac{15 b^4}{8 a^7} - \frac{35 b^6}{16 a^9}$$
$$\frac{1}{R^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^5} - \frac{5 b^2}{2 a^7} + \frac{35 b^4}{8 a^9}$$
$$\frac{1}{R^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{a^7} - \frac{7 b^2}{2 a^9} + \frac{63 b^4}{8 a^{11}}$$
$$\frac{1}{R^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{a^9} - \frac{9 b^2}{2 a^{11}}, \quad \frac{1}{R^{\frac{11}{2}}} = \frac{1}{a^{11}} - \frac{11 b^2}{2 a^{13}}$$

$$V^2 = C - \frac{3b^2\Delta\varphi m}{2a^4} + \frac{15b_4\Delta\varphi m}{8a^6} - \frac{35b^6\Delta\varphi m}{16a^8} - \frac{3b^2\Delta\varphi m}{a^4} + \frac{15b^4\Delta\varphi m}{2a^6} - \frac{105b^6\Delta\varphi m}{8a^8}$$
$$+ \frac{45b^2\Delta\varphi m}{8a^4} - \frac{315b^4\Delta\varphi m}{16a^6} + \frac{2835b^6\Delta\varphi m}{64a^8} - \frac{105b^4\Delta\varphi m}{8a^6} + \frac{945b^6\Delta\varphi m}{16a^8}$$
$$+ \frac{1575b^4\Delta\varphi m}{64a^6} - \frac{17325b^6\Delta\varphi m}{128a^8} - \frac{3465b^6\Delta\varphi m}{64a^8} + \frac{105105b^6\Delta\varphi m}{1024a^8}$$
$$V^2 = C + \frac{9b^2\Delta\varphi m}{8a^4} + \frac{75b^4\Delta\varphi m}{64a^6} + \frac{1225b^6\Delta\varphi m}{1024a^8}.$$

Eſt vero $\frac{M}{b}$ in duplicata ratione velocitatis mediae corporis in ellipſi ſeſe volventis, poſito quod maſſa Planetae in foco ellipſeos conſtituti ad maſſam Planetae alterius attrahentis ſe habeat ut $M : 1$. Quare ſi pro ipſa velocitate media ſcribatur 1, & differentiae totius dimidium accipiatur, fiet $\frac{b^3\Delta\varphi m}{16a^4 . M}\left(9 + \frac{75b^2}{8a^2} + \frac{1225b^4}{128a^4}\right)$ velocitas media projectionis, quae inferiori Planetae revolutionibus ſingulis accedet. Quod erat primum.

Corollarium.

Inde colligitur projectionis velocitatem, quae ex vi perturbatrice oritur, nullam eſſe quando linea AT cum linea Apſidum Zz coincidit, maximam vero fieri quando duae lineae ad rectos angulos ſe interſecant. Patet autem quod ſi inferior Planeta moveatur ſecundum ordinem linearum $ZPzp$, & ſuperior Planeta ex plaga ZPz in quadratura Apſidum Zz reperiatur, propior erit Planetae ipſi inferiori ubi a ſumma Apſide ad conjunctionem tendet, quam cum inde ad Perihelium progredietur, adeoque magis in priore caſu accelerabit ipſius motum, quam in caſu altero retardare debeat. Igitur ſi ſinus m poſitivo ſigno accipiatur ex ea parte, in qua inferior Planeta tendit a ſumma ad imam Apſidem, exprimet $\frac{b^3\Delta\varphi m}{16a^4 . M}\left(9 + \frac{75b^2}{8a^2} + \frac{1225b^4}{128a^4}\right)$ accelerationem totam; con-

contra vero $-\frac{b^3 \Delta \varphi m}{16 a^4 . M}\left(9 + \frac{75 b^2}{8 a^2} + \frac{1225 b^4}{128 a^4}\right)$ exprimet totam retardationem ex alia parte orbitae, in qua ſinus m negative accipi debet, Planetamque inferiorem ſuperioris actione retardari manifeſtum eſt.

Casus Secundus.

Quod ſi Planeta attrahens ſit inferior, quantitas b in denominatores ſingulos rejicienda erit. Tum vero etiam facilius priores ſeriei totius termini ſupputari poterunt ſi fiat

$$\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} - \frac{3 a^2}{2 b^5} + \frac{15 a^4}{8 b^7}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{b^5} - \frac{5 a^2}{2 b^7} + \frac{35 a^4}{8 b^9}$$

$$\frac{1}{R^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{b^7} - \frac{7 a^2}{2 b^9}$$

$$V^2 = C + \frac{a \Delta \varphi m}{b^3} - \frac{3 a^3 \Delta \varphi m}{2 b^5} + \frac{15 a^5 \Delta \varphi m}{8 b^7} - \frac{\Delta \varphi m}{a^2}$$
$$- \frac{3 a \Delta \varphi m}{b^3} + \frac{15 a^3 \Delta \varphi m}{2 b^5} - \frac{105 a^5 \Delta \varphi m}{8 b^7} + \frac{45 a^3 \Delta \varphi m}{8 b^5}$$
$$- \frac{315 a^5 \Delta \varphi m}{16 b^7} - \frac{105 a^3 \Delta \varphi m}{8 b^5} + \frac{945 a^5 \Delta \varphi m}{16 b^7}$$
$$+ \frac{1575 a^5 \Delta \varphi m}{64 b^7} - \frac{3465 a^5 \Delta \varphi m}{64 b^7}$$

$$V^2 = C - \frac{2 a \Delta \varphi m}{b^3} - \frac{\Delta \varphi m}{a^2} - \frac{3 a^3 \Delta \varphi m}{2 b^5} - \frac{45 a^5 \Delta \varphi m}{32 b^7}.$$

atque erit $-\frac{a \Delta \varphi m}{b^2 . M} - \frac{b \Delta \varphi m}{2 a^2 . M} - \frac{3 a^3 \Delta \varphi m}{4 b^4 . M} - \frac{45 a^5 \Delta \varphi m}{64 b^6 . M}$ velocitas, quae ſingulis revolutionibus accedet velocitati mediae Planetae ſuperioris. Quod erat alterum.

Co-

Corollarium Primum.

Rurſus igitur in hoc caſu, quoniam diſtantia Planetae attrahentis conſtituit numeratores fractionum ſingularum, minime evaneſcit terminus $\frac{\Delta \varphi m}{a^2}$. Quod ſi vero conſideretur actione omnium Planetarum parum admodum aberrare Solem a communi centro gravitatis totius ſyſtematis, aut ſi motus Planetae attracti ad immobile centrum virium referatur, cenſeri poterit nova velocitas projectionis, quae ſingulis ipſius revolutionibus reſpondet, $-\frac{a \Delta \varphi m}{b^2 . M}\left(1 + \frac{3a^2}{4b^2} + \frac{45 a^4}{64 b^4}\right)$. In utraque autem hypotheſi velocitas eadem fiet maxima quando Planeta attrahens reperietur in quadraturis Apſidum orbitae ellipticae, & quando erit in linea Apſidum velocitas media Planetae alterius ſuperioris revolutionibus ſingulis non perturbabitur.

Corollarium Secundum.

Quia conſtat pariter Planetam ſuperiorem retardari ſi Planeta attrahens, & inferior circa primam quadraturam Apſidum orbitae ellipticae jaceat, & Planetae eidem ſuperiori a quadratura ad Perihelium progredienti ſit propior, quam cum ab Aphelio ad quadraturam proficiſcitur; ex ea parte poſitive accepto ſinu m, deſignabit

$$-\frac{\Delta \varphi m}{M}\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{2a^2}\right) - \frac{3a^3 \Delta \varphi m}{4b^4 M}\left(1 + \frac{15a^2}{16b^2}\right)$$ retardationem

totam. Contra hac ipſa quantitate poſitive accepta exprimetur tota acceleratio Planetae ſuperioris inferiore ex adverſa parte orbitae conſtituto, ubi ſinus m negative accipi debet, & Planeta inferior ſuperiori a Perihelio ad ſecundam quadraturam tendenti propior eſt quam cum a ſecunda quadratura ad Aphelium ſuum revertitur.

Ca-

CASUS TERTIUS.

Si denique acceleratio Lunae, quae pendet ex vario Solis, & Apſidum aſpectu, requiratur, omitti poterunt de more termini, quibus diſtantia Terrae, & Solis in denominatore poſita ſuperat tertiam dimenſionem, ſed quadraticae etiam excentricitatis poteſtates ſupputandae erunt. Tum vero ſi vis omnis, quae aequabilem arearum Lunae deſcriptionem perturbat, ut in *Coroll.* 1. *Probl.* 2. definita eſt, ducatur in $\left(1 \pm \frac{\phi x}{b^2}\right) dz$, & negligantur termini, qui in oppoſitis punctis orbitae ſe mutuo deſtruunt, prodibit

$$V\,dV = \frac{3\phi^2 m n}{b^5\, a^3}(2x^4 - 2x^2y^2)\,dz$$

$$V^2 = C + \frac{6\phi^2 m n}{b^5\, a^3}\left(\frac{3}{4}b^5\,\Delta - \frac{1}{4}b^5\,\Delta\right) = C + \frac{3\Delta\phi^2 m n}{a^3}$$

& velocitas media Lunae, ad velocitatem totam ſe habebit in ſubduplicata ratione quantitatis $\frac{M}{b} : \frac{M}{b} + \frac{3\Delta\phi^2 m n}{a^3}$, ſive quam proxime ut $\frac{M}{b} : \frac{M}{b} + \frac{3\Delta\phi^2 m n}{2a^3}$, ad velocitatem autem adjectam ſingulis revolutionibus ſe habebit ut $M : \frac{3b\Delta\phi^2 m n}{2a^3}$. Quod erat tertium.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quia numerus revolutionum eſt reciproce ut tempus periodicum, & tempus periodicum reciproce ut motus medius, adeoque numerus revolutionum eſt motui medio directe proportionalis, ſi motus medii Lunae, Solis, & Apogaei ſint L, S, A, erit $\frac{L}{S-A}$ numerus revolutionum a Luna abſolutarum una Apogaei circa Terram revolutione, atque erit $\frac{3b\Delta\phi^2 m n}{2a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$ ſumma velocitatum, quae projectioni

Lu-

Lunae adjici possent, si toto eo tempore Apogaei respectu Solis positio maneret eadem. Erit etiam $\Delta : \frac{dn}{m}$ ut velocitatum omnium summa ad velocitatem illam, quae Lunae adjicietur quo tempore Apogaeum propius Soli accedet arcu quam minimo $\frac{dn}{m}$: quae propterea velocitas evadet =
$\frac{3b\varphi^2 n\,dn}{2a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$.

Corollarium Secundum.

Quare variis Apogæi, Solisque aspectibus sese excipientibus summa velocitatum additarum quo tempore Apogaeum Soli accedit angulo, cujus sinus est n, fiet $= \frac{3b\varphi^2 n^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$, proportionalis scilicet quadrato distantiae Apogæi ipsius a quadraturis Solis. Erit etiam velocitas minima in quadraturis Apogaei cum Sole ad velocitatem maximam in syzigiis ut $M : M + \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$. Quare si bisecetur horum motuum differentia, motus Lunae tam variabilis quam uniformis juxta notum Machinii theorema exponi poterunt ope circuli, & ellipseos cujus axis major sit ad minorem in subduplicata ratione quantitatis $2M + \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A} : 2M - \frac{3b\varphi^2}{4a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$, sive directe ut $M + \frac{3b\varphi^2}{16a^3} \cdot \frac{L}{S-A} : M - \frac{3b\varphi^2}{16a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$.

Corollarium Tertium.

Et erit summa axium $2M$ ad differentiam $\frac{3b\varphi^2}{8a^3} \cdot \frac{L}{S-A}$ ut radius ad sinum aequationis maximae, quae habebitur in octante. Est autem $L : S = 13\frac{1}{2} : 1$, $S : A = 9 : 1$, adeoque est $L : S - A = 15\frac{1}{5} : 1$ quam proxime. Rursus est $\frac{M}{b^2} : \frac{b}{a^3} =$
178725:

178725 : 1000, $\frac{\varphi}{b}=0.05505$, & $\frac{\varphi^2}{b^2}=0.0030305025$. Quare erit radius ad sinum aequationis maximae ut 1000000:51, & eadem aequatio aucta in ratione revolutionis synodicae ad periodicam fiet circiter 12", & addi debebit motui medio Lunae in transitu Apogaei a Solis quadratura ad syzigiam, subtrahi vero in transitu a syzigia ad quadraturam.

S C H O L I O N.

Walmeslejus in *Prop.* 5. *Par.* 2. de inæqualitatibus motuum Lunarium aequationem medii motus investigavit, quae ex varia Lunae gravitate in Terram pro vario Solis, & Apogaei aspectu pendet. Ipsius methodus ex jam dictis facile percipitur. Nam si sit K incrementum diametri transversae Lunaris orbitae, quod sola vi $\frac{b}{2a^3}$ integra Lunæ revolutione gigni posset, tota area ellipseos erit ad sectorem quam minimum $\frac{TC^2 . dz}{2TM}$, sive ad $\left(\frac{c^4}{b^2} \pm \frac{2c^4 \varphi x}{b^6} + \frac{3c^4\varphi^2 x^2}{b^8}\right)dz$ ut incrementum totum ad partem illam, qua minimo quovis tempore diameter transversa ob eamdem vim augeretur. Tum erit vis $\frac{b}{2a^3}$ ad vim, quae prioribus terminis primae partis *Probl.* 3. definitur, ut mox inventum elementum ad elementum aliud, quo vere augebitur eodem tempore diameter transversa. Quare collectis elementis omnibus, & posito $b=1$ fiet verum diametri incrementum $=3c^5 K\left(1+\frac{3}{2}\varphi^2+3\varphi^2 n^2\right).\frac{L}{S-A}$, quod in quadraturis Apogaei evadet $=3c^5 K.\left(1+\frac{3}{2}\varphi^2\right).\frac{L}{S-A}$, in syzigiis vero $=3c^5 K.\left(1+\frac{9}{2}\varphi^2\right).\frac{L}{S-A}$: adeoque si mediocris diameter sit $=2$, erit diameter maxima $=2+\frac{9}{2}c^5\varphi^2 K.\frac{L}{S-A}$, & diameter minima

L $=2$

$= 2 - \frac{9}{2} c^5 \varphi^2 K . \frac{L}{S - A}$. Cum igitur in quavis orbis positione excessus diametri supra minimam sit semper proportionalis quadrato sinus distantiæ Apogæi a quadratura, & tempora periodica sint quam proxime in duplicata ratione diametrorum, medii autem motus in ratione inversa periodicorum temporum, motus Lunae, & variabilis, & uniformis exhiberi poterit ope circuli, & ellipseos cujus axis major sit ad minorem ut $1 + \frac{9}{4} c^5 \varphi^2 K . \frac{L}{S - A} : 1 - \frac{9}{4} c^5 \varphi^2 K . \frac{L}{S - A}$, & summa ad differentiam axium se habebit ut radius ad sinum æquationis maximæ. Ita si quantitas K accipiatur ut ab eodem Walmeslejo definita est in *Prop.* 2. *Par.* 1. prodibit æquatio maxima 2' 20", eaque aucta in ratione revolutionis synodicæ ad periodicam fiet 2' 31". Si addatur æquatio alia 12", quam ex velocitatis projectilis alteratione oriri diximus, fiet tota æquatio maxima in octantibus 2' 43". In scholio Lunaris theoriae minime indicavit Newtonus se æquationem hanc ex theoria gravitatis supputasse: sed tantum ex Phænomenis 3' 45" prodire monuit. Censuit autem Walmeslejus aut sufficientem observationum numerum Newtono defuisse, aut ob multiplices Lunaris motus inæqualitates non potuisse æquationem ipsam ab aliis rite distinguere.

CA-

CAPUT TERTIUM.

De acceleratione, & retardatione, quæ pendet ex loco Apſidum Planetæ attracti, attrahentiſque.

PROBLEMA QUINTUM.

SI ipſe etiam Planeta attrahens circa eumdem focum deſcribat ellipſim ſuam, invenire velocitatem mediam projectionis Planetæ alterius, qui attrahitur.

RESOLUTIO.

Moveatur etiam Planeta attrahens in orbita elliptica GAB, *fig.* 11., & ſit linea Apſidum BT, & cum linea Apſidum ZT prioris orbitæ conſtituat angulum BTZ, cujus ſinus ſit p, coſinus vero q. Sit A Planetæ attrahentis locus, & excentricitas orbitae HT ſit $=\varepsilon$. Tum centro T, & radio TL, qui ſemiaxi majori ellipſeos HB ſit aequalis deſcribatur circulus TLK, & ſit ipſe ſemiaxis major $=r$, ſemiaxis minor $=l$, $TO=\pm u$, $LO=+-v$. His poſitis fiet primo in formulis problematum antecedentium $n=Cos.\,ATP=Cos.\,BTZ.\,Cos.\,LTO-Sin.\,BTZ.\,Sin.\,LTO=\frac{\pm qu -+ pv}{r}$, & $m=Sin.\,ATP=Sin.\,BTZ.\,Cos.\,LTO+Cos.\,BTZ.\,Sin.\,LTO=\frac{\pm pu +- qv}{r}$. Deinde erit $a=AT=\frac{rl^2}{r^2\mp\varepsilon u}=\frac{r^3}{r^2\mp\varepsilon u}$, ſi ſcilicet pro l^2 ſcribatur $r^2-\varepsilon^2$, & negligantur pluſquam quadraticae excentricitatis poteſtates. Erit denique tota area ellipſeos $=\frac{1}{2}r^2\Delta$, & ſector quam minimus $=\frac{AT^2.\,dz}{2r}=\left(\frac{1}{2}r\pm\frac{\varepsilon u}{r}\right)dz$, poſito quod elementum deſcripti circuli ſit dz.

Casus Primus.

Si Planeta attrahens ſit ſuperior, & manere intelligatur in loco *A*, juxta *caſ.* 1. *Probl.* 4., erit tota projectionis velocitas, quae inferiori Planetae revolutionibus ſingulis accedet

$$= \frac{9 b^3 \triangle \varphi}{16 r^{13} . M} (\pm pu + -qv)(r^2 \pm \varpi u)^4 + \frac{75 b^5 \triangle \varphi}{128 r^{19} . M} (\pm pu + -qv)(r^2 \mp \varpi u)^6 + \frac{1225 b^7 \triangle \varphi}{2048 r^{25} . M} (\pm pu + -qv)(r^2 \mp \varpi u)^8 .$$

Porro velocitates mediae, quae dato quocumque tempore accedunt, quibus ſcilicet uniformiter continuatis totum velocitatis projectilis augmentum revolutione integra haberetur, ſunt tempori proportionales. Rurſus periodica tempora inferioris Planetae, ſuperiorisque ſunt inter ſe in ratione ſeſquiplicata majorum axium $2b$, $2r$, ac tempus integrae revolutionis Planetae ſuperioris eſt ad tempus, quo arcum minimum deſcribit, ut tota area ellipſeos ad ſectorem quam minimum, ſive ut $\frac{1}{2} r^2 \triangle : (\frac{1}{2} r \pm \frac{\varpi . u}{r}) \, dz$. Quare dum ſuperior Planeta arcum quam minimum ellipſeos ſuæ deſcribet, elementum velocitatis projectilis, quæ inferiori Planetæ accedet, definietur priore formula ducta in

$$\frac{r^{\frac{3}{2}} (\frac{1}{2} r \pm \frac{\varpi u}{r}) \, dz}{b^{\frac{3}{2}} . \frac{1}{2} r^2 \triangle},$$

& æquationem ordinando, omittendo que terminos, qui ambiguo ſigno ſe deſtruunt, fiet elementum ipſum velocitatis

$$= \frac{9 b^{\frac{3}{2}} \varphi}{8 r^{\frac{13}{2}} . M} (p \varpi u^2 - 2 p \varpi u^2) \, dz + \frac{75 b^{\frac{7}{2}} \varphi}{64 r^{\frac{17}{2}} . M} (p \varpi u^2 - 3 p \varpi u^2) \, dz$$

$$+\frac{1225\, b^{\frac{11}{2}}\, \diamond}{1024\, r^{\frac{21}{2}}.\, M}(p \smile u^2 - 4 p \smile u^2)\, dz$$

$$= -\frac{9 b^{\frac{3}{2}} p \diamond \smile u^2\, dz}{8 r^{\frac{13}{2}}.\, M} - \frac{75 b^{\frac{7}{2}} p \diamond \smile u^2\, dz}{32 r^{\frac{17}{2}}.\, M} - \frac{3675 b^{\frac{11}{2}} p \smile \diamond u^2\, dz}{1024 r^{\frac{21}{2}}.\, M}$$

& ſumma elementorum omnium, ſive tota projectionis velocitas, quam inferior Planeta revolutione integra ſuperioris Planetæ acquiret, fiet

$$= -\frac{3 b^{\frac{3}{2}} \Delta \diamond \smile p}{16 r^{\frac{7}{2}}.\, M}\left(3 + \frac{25 b^2}{4 r^2} + \frac{1225 b^4}{128 r^4}\right).$$ Quod erat primum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Ex ſerie totius calculi manifeſtum eſt eamdem adhuc prodire velocitatis adjectæ formulam ſi ii termini ſupputentur, in quibus occurrunt facta $\diamond \smile^2$. Deſtruunt enim ſeſe invicem ſignorum oppoſitione facta ipſa, & alii dumtaxat ſuperſunt termini, in quibus $\diamond \smile^3$ occurrit. Pariter ſi in *Problem.* 4. eorum terminorum ratio eſſet habita, quæ per $\diamond^2$ multiplicantur, ut ſunt $\frac{3 b \Delta \diamond^2 mn}{2 a^3}$, $\frac{15 b^3 \Delta \diamond^2 mn}{4 a^5}$ &c; conſiderato poſtmodum ſuperioris Planetæ motu, adhuc termini iidem ſeſe deſtruerent, nec niſi alii ſupereſſent, qui involvunt alias poteſtates excentricitatis, fractioneſque longe minores, quam ut demum ſenſibiles æquationes mediorum motuum ſuppeditent. Unde licet primam tantum excentricitatis utriuſque orbitæ poteſtatem ſupputaverimus non minus tamen accurata velocitatis formula cenſeri debet.

Co-

Corollarium Secundum.

Ex ipsa autem formula colligitur quod si summæ Apsides duarum orbitarum aut conjungantur, aut opponantur inter se invicem, scilicet si aut ad idem cæli punctum e Sole referantur, aut ad puncta ex diametro opposita, Planeta inferior velocitatem mediam projectionis invariabiliter tuebitur in orbita elliptica non minus quam in circulari orbita tueretur. Si lineae Apsidum ad rectos angulos se intersecent velocitatis projectilis incrementum aut decrementum fiet maximum: & quidem in prima quadratura Apsidum, in ea scilicet duarum orbitarum positione, in qua juxta corollarium *cas.* 1. *probl.* 4. quantitas p positive accipitur, & Planeta inferior digressus e plaga summae Apsidis Planetae superioris tendit ad suam imam Apsidem, maxime retardabitur ipse Planeta inferior: contra vero maxime accelerabitur in opposita positione orbitarum, in qua quantitas p negative accipienda est.

Corollarium Tertium.

Erat vero juxta Hirei observationes faeculi hujus initio Apogaeum Saturni in signo Sagittarii 29° 14': Apogaeum Jovis in signo Librae 10° 17': Apogaeum Martis in signo Virginis 35': Apogaeum Terrae in signo Cancri 8° 7': Apogaeum Veneris in signo Aquarii 6° 56': Apogaeum Mercurii in signo Sagittarii 13° 13': scilicet positis orbitis, ut modo sunt, Aphelium Saturni circa prima quadraturam cum Aphelio Jovis reperitur, & pro Jove est circiter $p = 1$. Cum igitur motus Apsidum sit lentissimus, intelligitur facile elapsis faeculis velocitatem projectionis Jovis decrevisse semper Saturni actione, & faeculis subsequentibus rursus imminui oportere, nec nisi Apsidibus demum ad aspectus oppositos delatis rursus augeri posse.

Co-

Corollarium Quartum.

Pariter Aphelium Jovis eſt circa primam quadraturam cum Aphelio Terrae, a prima autem quadratura Aphelii Martis, & a ſecunda Veneris, & Mercurii diſtat circiter $40°, 26° \frac{1}{2}, 27°$. Quare inferiorum Planetarum orbitis ad orbitam Jovis relatis fiet p pro Marte $= 0 . 64 = \frac{16}{25}$, pro Terra $= 1$, pro Venere & Mercurio $= -\frac{9}{10}$. Quod ſi vero orbita Terrae ad Martis orbitam referatur, & Mercurii orbita ad orbitam Veneris fiet $p = \frac{4}{5}$. Imminuetur igitur actione Jovis velocitas Terrae, & Martis, & velocitas Mercurii, & Veneris augebitur: actione autem Martis velocitas projectionis Terrae, & Mercurii velocitas actione Veneris imminuetur.

Corollarium Quintum.

Quia imminuta velocitate projectionis centro propius accedere debet Planeta, & corripi tempus periodicum, augerique motus medius, qui periodici temporis proportionem inverſam ſequitur: & contra velocitate projectionis aucta augeri etiam tempus periodicum, & motus medius imminui debet; praeſto eſt periodicum tempus Jovis Saturni actione, & actione Jovis periodica tempora Martis, & Terrae corripi. Imminuetur etiam actione Martis anni ſolaris quantitas, & periodicum tempus Veneris actione Jovis augebitur. Tempus periodicum Mercurii augebitur quidem actione Jovis, ſed actione Veneris imminuetur. Motis Planetarum Aphelis inter ſe, alia fiet projectionis velocitas, quae addetur, aut detrahetur, & contrariis orbitarum poſitionibus contrariae mediorum motuum viciſſitudines habebuntur, & inte-

gra

gra Apheliorum revolutione ad priores dimenſiones redibunt orbitae.

Casus Secundus.

Si Planeta attrahens ſit inferior, & in formula ſecundi caſus *probl.* 4. ſubſtitutiones eaedem fiant, erit nova projectionis velocitas, quae dato loco Planetae attrahentis ſingulis Planetae attracti revolutionibus reſpondebit

$$= -\frac{r^2 \triangle \varphi(\pm pu + - qv)}{b^2 M.(r^2 \mp \cdot u)} \mp b \frac{\triangle \varphi(\pm pu + - qv)(r^2 \mp \cdot u)^2}{2 r^7 . M}$$

$$-\frac{3 r^8 \triangle \varphi(\pm pu + - qv)}{4 b^4 M.(r^2 \mp \cdot u)^3} - \frac{45 r^9 \triangle \varphi(\pm pu + - qv).}{64 b^6 M.(r^2 \mp \cdot u)^5}$$

Qua quidem formula ducta in $\frac{r^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2} r \pm \frac{\cdot u}{r}\right)}{b^{\frac{3}{2}} . \frac{1}{2} r^2 \triangle} dz$, & neglectis terminis omnibus ſignorum oppoſitione ſe deſtruentibus, fiet elementum velocitatis, quod elemento cuilibet periodici temporis Planetæ ipſius inferioris in orbita ſua moti reſpondebit

$$= -\frac{3 \varphi \cdot p u^2 dz}{r^{\frac{3}{2}} b^{\frac{7}{2}} M} - \frac{15 r^{\frac{1}{2}} \varphi \cdot p u^2 dz}{4 b^{\frac{11}{2}} M} - \frac{315 r^{\frac{5}{2}} \varphi \cdot p u^2 dz}{64 b^{\frac{15}{2}} M}$$

& ſumma elementorum omnium, ſeu totum incrementum, aut decrementum velocitatis erit pro ſingulis inferioris Planetæ revolutionibus

$$= -\frac{3 r^{\frac{3}{2}} \triangle \varphi \cdot p}{2 b^{\frac{7}{2}} M}\left(1 + \frac{5 r^2}{4 b^2} + \frac{105 r^4}{64 b^4}\right).$$ Quod erat alterum.

Corollarium Primum.

Si congruant igitur lineae Apſidum, & binae orbitae ſuperioris Planetae, inferiorisque aut ſimiliter, aut contrariae

riae ſint poſitae, ac fiat $p = 0$, accelerationes omnes, & retardationes motus Planetae ſuperioris compenſabunt demum ſeſe invicem, & velocitas media projectionis actione inferioris Planetae minime turbabitur. Si ſit $p = \pm 1$, & lineae Apſidum conſiſtant ad rectos angulos, incrementum, aut decrementum velocitatis fiet maximum. Et quidem ſi quantitas p negativa ſit, hoc eſt ſi Aphelium Planetae inferioris juxta *Coroll.* 2. *Caſ.* 2. *Probl.* 4. ex parte illa jaceat, in qua ſuperior Planeta a Perihelio ad Aphelium ſuum progreditur, Planeta idem ſuperior ſecundum tangentem orbitae accelerabitur, & contra retardabitur orbitis contrarie poſitis.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Quia igitur Aphelium Jovis integro circiter quadrante ſecundum ſignorum ordinem Saturni Aphelium ſubſequitur, & eſt $p = -1$, velocitas Saturni magis ſemper magiſque actione Jovis augebitur. Ob eamdem rationem cum in orbitis Terrae, & Martis ſit $p = -\frac{4}{5}$, & in orbitis Veneris, & Terrae $p = -0.47$, velocitas Martis actione Terrae, & velocitas Terrae actione Veneris continue augebitur. Id etiam ex *Coroll.* 3., & 4. prioris caſus deduci poterat. Vires enim ſuperioris Planetae, inferioriſque in oppoſitas partes diriguntur: unde ibi accelerari ſuperiorem Planetam neceſſe eſt, ubi inferioris motus ſecundum tangentem orbitae acceleratur, & vice verſa.

COROLLARIUM TERTIUM.

Pariter quia motu projectionis aucto longius ſemper a centro recedere debet Planeta, amplioremque orbitam, ac diuturnius tempus periodicum ſibi comparare; patet in ea orbitarum poſitione, quae modo eſt, tempus periodicum Saturni continue augeri actione Jovis, & motum medium imminui. Tempora etiam periodica Martis ob vim Terrae, &

M Ter-

Terrae ob vim Veneris augeri debent, & quantitas anni Tropici medii aut minor ſemper, aut major fiet prout vis Veneris aut minor, aut major erit actione Martis ſimul, & Jovis.

SCHOLION.

Si in formulis *Coroll.* 2. & 5. *Probl.* 3. libri hujus ſimiles ſubſtitutiones fiant, prodibit media vis centripeta Planetae cujuſcumque inferioris

$$= \frac{M}{b^2} - \frac{b}{2r^3} - \frac{9b\omega^2}{4r^5} + \frac{\varphi^2}{4br^3} - \frac{9b^3}{16r^5} - \frac{375b\varphi^2}{32r^5} + \frac{9b\varphi\omega q}{4r^5}.$$

Planetae autem ſuperioris media vis centripeta erit

$$= \frac{M+1}{b^2} + \frac{3r^2}{4b^4} + \frac{5\varphi^2}{4b^4} - \frac{15\omega^2}{8b^4} + \frac{45r^4}{64b^6} + \frac{57r^2\varphi^2}{8b^6} - \frac{3\varphi\omega q}{2b^4}.$$

Ex quarum formularum contemplatione manifeſtum fiet Apheliis duarum orbitarum conjunctis inter ſe, & poſito $q=1$, vim quidem illam maximam eſſe, hanc vero minimam, in quadraturis Apſidum utramque eſſe mediam mediarum omnium, & in oppoſitione demum vim priorem minimam, maximamque alteram evadere. Quare cum Aphelium Saturni Aphelio Jovis cèlerius moveatur in conſequentia, adeoque utriuſque orbitae Aphelia a conjunctione ad quadraturas, & oppoſitionem tendant, patet vires centripetas Jovis quidem imminui ſemper, Saturni autem augeri, atque hac de cauſſa periodicum tempus Saturni corripi, & tempus Jovis diuturnius fieri oportere. Ita gravior evaderet difficultas, quae ex periodicis hiſce temporibus eruitur, & prima fronte videri poſſet utriuſque Planetae motum minus etiam legibus attractionis mutuae reſpondere, cum praeter conſtans illud incrementum gravitatis mediae Saturni in Solem, & decrementum gravitatis Jovis, ex quo nullas orbitarum, & mediorum motuum viciſſitudines oriri diximus, quae continue, & ſucceſſu temporis majores fiant, aliud inſuper incrementum, & decrementum habeatur, quod magis ſemper magiſque creſcere neceſſe eſt. Verum quia maxima aequatio, vis

cen-

centripetae, quae pendet ex vario aſpectu Planetae attrahentis in orbita ſua immobiliter poſiti, & Apſidum orbitae Planetae attracti, cujus adeo exiguos effectus eſſe in ſcholio *cap.* 1. libri hujus jam adnotavimus, ad aequationem maximam vis centripetae, quae pendet ex vario aſpectu utriuſque Aphelii, & poſitione duarum orbitarum, ſe habet in inferioribus quidem Planetis ut $\frac{9b^4}{8a^4} : \frac{9b^4\varpi}{4r^5}$, ſive ut $r : 2\varpi$, in Planetis autem ſuperioribus, qui actione inferiorum perturbantur ut $2r : \varpi$, nihil inde expectandum eſt, quod ſenſibile demum fiat. Inſuper cum Aphelia Planetarum lentiſſime moveantur fixarum reſpectu in conſequentia, & adhuc tardiorem motum habeant inter ſe, integris etiam ſaeculis eadem orbitarum inter ſe invicem poſitio cenſeri poteſt, eaedem mediae vires centripetae in focum, eaedemque orbitarum dimenſiones, & periodica tempora, quae non niſi continue auctis, aut imminutis viribus ipſis centripetis continue imminui, aut augeri debent. Supereſt igitur ut ad calculum revocemus ſaeculares aequationes mediarum virium, quae ſecundum tangentem uniuſcujuſque orbitae exercentur, & quibus projectionis motus manente etiam poſitione orbitarum, acceleratur ſemper, aut retardatur, videamuſque utrum inde profluant aequationes mediorum motuum, quae obſervationibus Aſtronomicis ſatisfaciant. Id ſubſequenti capiti argumentum ſuppeditabit.

CAPUT QUARTUM.

De motu medio Planetarum.

LEMMA TERTIUM.

DAta mutatione velocitatis invenire mutationem axis tranſverſi ellipſeos.

Moveatur Planeta in ellipſi ZCz, *fig.* 12., circa focum T, & ſit CQ altitudo, per quam libere cadendo ea vi centripeta, quam in C habet velocitatem ſuæ projectionis acquireret. Si fiat $TQ:TC=TC:TR$, erit TR axi tranſverſo Zz æqualis. Quod ſi in loco eodem C nova velocitas Planetæ accedat, quæ ad priorem projectionis velocitatem ſe habeat ut $V:1$, & præ ipſa ſatis ſit parva, Cq vero ſit altitudo, per quam tota velocitas cadendo acquiri poſſet, erunt ſpatia CQ, Cq in ratione duplicata velocitatum, ſive erit $CQ:Qq=1:2V$ quam proxime. Denique ſi fiat $Tq:TC=TC:Tr$, erit etiam quam proxime $TQ:Qq=TR:Rr$, unde ob $TQ=\frac{TC^2}{TR}$, erit incrementum axis tranſverſi $Rr=\frac{2V.TR.CQ}{TQ}=\frac{2V.TR}{TQ}.(TC-TQ)=\frac{2V.TR^2}{TC}-2V.TR=\frac{8V.b^2}{bc^2}(b^2\mp\varphi x)-4bV$, neglectoque ambiguo termino, & quadraticis excentricitatis poteſtatibus fiet $Rr=4bV$, & novus axis tranſverſus $=2b+4bV$.

COROLLARIUM.

Sunt vero periodica tempora inter ſe in ratione ſeſquiplicata majorum axium. Quare periodica tempora, quæ velocitatibus projectionis 1, & $1+V$ reſpondebunt, inter ſe erunt ut $(2b)^{\frac{3}{2}}:(2b)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(2b)^{\frac{1}{2}}.4bV=1:1+3V$, & perio-

riodicum tempus se habebit ad æquationem temporis, quæ ex aucta projectionis velocitate oritur ut $1 : 3V$.

PROBLEMA SEXTUM.

Data positione duarum orbitarum, & loco Apsidum invenire æquationem temporis periodici.

RESOLUTIO.

Casus Primus. Quia ob lentissimum motum Apsidum dato quocumque tempore data, & constans censeri potest positio duarum orbitarum Planetæ attracti, attrahentisque, revolutionibus singulis Planetæ superioris, juxta primam partem quinti problematis, ea velocitas inferiori Planetae adveniet, quæ ad velocitatem mediam projectionis se habebit ut $-\frac{3\,b^{\frac{3}{2}}\,\Delta\,\varphi \cdot p}{16\,r^{\frac{7}{2}}\,.\,M}\left(3+\frac{25\,b^2}{4\,r^2}+\frac{1225\,b^4}{128\,r^4}\right) : 1$. Quare juxta antecedens lemma, axis transversus $2b$ Planetæ inferioris abibit in $2b - \frac{3\,b^{\frac{5}{2}}\,\Delta\,\varphi \cdot p}{4\,r^{\frac{7}{2}}\,.\,M}\left(3+\frac{25\,b^2}{4\,r^2}+\frac{1225\,b^4}{128\,r^4}\right)$, & juxta corollarium lemmatis erit tempus periodicum inferioris ipsius Planetæ ad æquationem temporis habitam singulis superioris Planetæ revolutionibus ut $1 : -\frac{9\,b^{\frac{3}{2}}\,\Delta\,\varphi \cdot p}{16\,r^{\frac{7}{2}}\,.\,M}\left(3+\frac{25\,b^2}{4\,r^2}+\frac{1225\,b^4}{128\,r^4}\right)$. Quod erat primum.

Casus Secundus. Si superioris Planetæ motus ab inferiore perturbetur, erit juxta secundam partem quinti Problematis nova velocitas, quæ singulis inferioris Planetæ revolutionibus adveniet $= -\frac{3\,r^{\frac{3}{2}}\,\Delta\,\varphi \cdot p}{2\,b^{\frac{7}{2}}\,.\,M}\left(1+\frac{5\,r^2}{4\,b^2}+\frac{105\,r^4}{64\,b^4}\right)$, & juxta lemma tertium erit mutatio axis transversi orbitæ su-

ſuperioris Planetæ $= -\frac{6\, r^{\frac{3}{2}} \Delta \varphi \cdot p}{b^{\frac{5}{2}} M}\left(1 + \frac{5 r^2}{4 b^2} + \frac{105 r^4}{64 b^4}\right)$, ac denique juxta lemmatis corollarium tempus periodicum Planetæ ipſius ſuperioris ſe habebit ad æquationem temporis ſingulis inferioris Planetæ revolutionibus ut

$1 : -\frac{9\, r^{\frac{3}{2}} \Delta \varpi \cdot p}{2 b^{\frac{7}{2}} M}\left(1 + \frac{5 r^2}{4 b^2} + \frac{105 r^4}{64 b^4}\right)$. Quod erat alterum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quod ſi numeri ſubſtituantur ſpeciebus, & inquiratur primum æquatio temporis periodici, aut motus medii Saturni, quæ ex Jove oritur, fiet juxta lemma 1. *lib.* 1. $M : 1 = 10000000 : 11121$, tum juxta *Coroll.* 2. *Caſ.* 2. *Probl.* 5. *lib.* hujus erit $p = -1$, & ſi diſtantiæ mediæ b, & r ſtatuantur 95, & 52, earumque radices 9.8, & 7.2, erit $\frac{\varpi}{b} = \frac{5430}{95302} = \frac{2}{35}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{2505}{95302} = \frac{1}{38}$, $\Delta = \frac{44}{7}$, & tempus periodicum Saturni erit ad primum terminum æquationis, qua ſingulis revolutionibus Jovis augebitur, ut $2 . 95 . 98 . 10000000 : 9 . 52 . 72 . 11121 . \frac{44}{7} . \frac{1}{38} . \frac{2}{35}$ $= 21669025 . 10000000 : 370656 . 11121$.

Quare ſi pro tempore periodico ſubſtituatur motus medius Saturni 360°, ſive 1296000'', fiet ſingulis Jovis revolutionibus æquatio, qua imminuetur motus medius Saturni $= \frac{5342196727296''}{216690250000}$, & integro ſæculo, ſive $8\frac{1}{3}$ Jovis revolutionibus evadet $= \frac{44518306o608''}{2166902500} = 206''$ circiter.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Primus vero ſeriei terminus ad ſecundum ſe habebit ut $4 . 9025 : 5 . 2704 = 361 : 135$, & fiet ſecundus terminus æquatio-

tionis motus medii imminuti $= 77''$. Secundus denique se habebit ad tertium ut $16.9025:21.2704=9025:3549$: fiet scilicet tertius terminus æquationis $= 30''$. Si alii termini eadem proportione cum binis posterioribus decrescerent, oporteret addere $12''$, $5''$, $2''$. Quia vero si bini posteriores cum primo seriei termino comparentur tardius semper decrescere videtur series, censeri poterit sæcularis æquatio motus medii $= 340''$, & singulis annis mille fieret circiter unius gradus. Major autem, esse posset æquatio si aut materiæ quantitas in quatuor Jovis satellitibus ad quantitatem materiæ, Jovis proportionem sensibilem haberet, aut in Sole minor, & in Jove major materiæ quantitas haberetur quam supra statutum sit.

COROLLARIUM TERTIUM.

Ope earumdem substitutionum, & posito $p = 1$ juxta *Coroll.* 3. *cas.* 1. *Probl.* 1. fiet periodicum tempus Jovis ad primum terminum æquationis, qua tempus ipsum periodicum singulis Saturni revolutionibus imminuitur ut

$$16.95.98.10000000:9.3029.52.72.\frac{44}{7}.\frac{1}{38}.\frac{6}{35}$$

$$=95.490000000:3029.26.18.\frac{11}{133}.\frac{27}{35}$$

$$=216690250000000:62373168.$$

Unde fiet singulis Saturni revolutionibus primus terminus æquationis, qua augetur motus medius Jovis $=\frac{32738428419840'''}{21668025000} = 151'''$: & cum Saturnus revolutionem suam absolvat annis $29\frac{1}{2}$ circiter, evadet integro sæculo $= 512'''$.

COROLLARIUM QUARTUM.

Erit autem primus seriei terminus ad secundum ut $12.9025:25.2706=1083:676$, & secundus ad tertium ut $32.9025:49.2704=288800:132496$. Quare prodibit secundus

dus terminus $= 319'''$, & tertius $= 147'''$, & terminis paulo celerius decreſcentibus cenſeri poterit rotundo numero ſæcularis æquatio aucti motus medii Jovis $= 20''$. Si quantitas materiæ in quinque Saturni Satellitibus æqualis eſſet quantitati materiæ Saturni ipſius, evaderet tota æquatio ſæcularis $= 40''$: & ſi Saturni maſſa non 3029, ſed 4150 cum Newtono ſtatuenda eſſet, fieret $= 55''$: & ſi denique 3250 cum Graveſandio ſtatueretur, fieret $= 43''$, & medium accipiendo cenſeri poſſet dimidio fere minuto ſecundo annis ſingulis motum medium Jovis augeri.

Corollarium Quintum.

Ut definiamus æquationem, qua motus medius Martis juxta *Coroll.* 4., & 5. *caſ.* 1. *Prob.* 5. ſingulis Jovis revolutionibus augeri debet, ſtatuamus diſtantias medias 52, & 15, earumque radices 7 . 2, & 3 . 9, atque inſuper $p = \frac{16}{25}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{1415}{51980} = \frac{3}{110}$, $\frac{\varpi}{b} = \frac{2505}{51980} = \frac{1}{21}$. Erit motus medius Martis ad primum æquationis quæſitæ terminum ut

$$16 . 52 . 720000000 : 9 . 11121 . 15 . 39 . \frac{3}{110} . \frac{3}{21} . \frac{44}{7} . \frac{16}{25}$$

$$= 800000000 : 9 . 11121 . \frac{3}{49} . \frac{1}{5}$$

$$= 196000000000 : 300267.$$

Quare fiet ſingulis ſæculis idem terminus $= 16\frac{1}{2}''$: qui cum ad ſecundum ſe habeat ut $12 . 2704 : 25 . 225 = 10816 : 1875$, fiet ſecundus terminus $3''$, & ſerie celerrime convergente cenſeri poterit rotundo numero $= 20''$ tota ſæcularis æquatio, qua motus medius Martis actione Jovis augetur.

Corollarium Sextum.

At vero actione Terræ per *Coroll.* 2. & 3. *caſ.* 2. *Probl.* 5. tempus periodicum Martis augeri debet, & motus medius imminui, & ſi fiant diſtantiæ mediæ 15, & 10, earumque ra-

radices 3.9, & 3.2, $p = -\frac{4}{5}$, $\frac{\phi}{b} = \frac{168}{15203} = \frac{2}{181}$, $\frac{\varpi}{b} = \frac{1415}{15203} = \frac{1}{11}$, posita Terræ massa = 0.06, erit motus medius Martis ad primum terminum æquationis, qua singulis annis augetur actione Terræ ut

$$15.39.1000000 : 9.6.10.32.\frac{1}{181}.\frac{1}{11}.\frac{44}{7}:\frac{4}{5}$$

$$= 25.81250 : \frac{3.64}{1267}.$$

Quare fiet integro sæculo idem terminus = 10''; qui cum ad secundum se habeat ut 4.225 : 500 = 9 : 5, & secundus ad tertium ut 16.225 : 2100 = 16 : 21, fiet secundus terminus = $5\frac{1}{2}''$, tertius = 3'', & compositis simul Jovis, & Terræ viribus nulla orietur periodici motus Martis æquatio, quæ demum observationibus possit detegi.

Corollarium Septimum.

Quod si æquatio anni Tropici, quæ ex Jove oritur requiratur, erit $\frac{\phi}{b} = \frac{168}{51980} = \frac{1}{313}$, $\frac{\varpi}{b} = \frac{2505}{51980} = \frac{1}{21}$, $p = 1$, & tempus periodicum Terræ se habebit ad primum terminum æquationis, qua singulis Jovis revolutionibus corripitur ut

$$16.52.720000000 : 9.11121.10.32.\frac{1}{21}.\frac{3}{313}.\frac{44}{7}$$

$$= 26.18000000 : 100089.\frac{1}{21}.\frac{33}{2191}$$

$$= 215331480000000 : 3302937.$$

Quare cum annus Tropicus sit dierum 365, horarum 5, 48' 40'', sive 31556920'', fiet singulis Jovis revolutionibus æquatio anni tropici = $\frac{10423051867404''}{2153314800000}$, & integro sæculo = $\frac{868587655617''}{21533148000}$ = 40''. Quia vero primus æquationis terminus ad secundum se habeat ut 12.2704 : 2500, erit secundus ter-

minus = 3'', & ferie celerrime convergente cenferi poterit tota fæcularis æquatio = 43'' temporis.

Corollarium Octavum.

Quia foliditas Terræ ad Martis foliditatem fe habet ut 100:65, fi Mars ejufdem eflet denfitatis cum Terra, pofita Solis mafla 1000000, foret materiæ quantitas in Marte $\frac{39}{10}$, & periodicum tempus Terræ fe haberet ad primum terminum æquationis, qua fingulis ipfius Martis revolutionibus minuitur ut

$16.15.39000000 : 9.\frac{39}{10}.10.32.\frac{1}{11}.\frac{6}{181}.\frac{44}{7}.\frac{4}{5}$

$= 5000000 : \frac{9}{7}.\frac{16}{181}.\frac{4}{5}$

& fieret integro fæculo, feu 50 Martis revolutionibus primus æquationis quæfitæ terminus $= \frac{113604912''}{3959375} = 29''$. Si denfitas Planetarum recedendo a Sole decrefceret juxta illam Euleri regulam in ratione fubduplicata temporum periodicorum, terminum ipfum minuendo in ratione $\sqrt{2}:1$, fiet $= 19\frac{1}{3}''$. Ad fecundum autem fe habet ut 27:25, & fecundus ad tertium ut 72:49. Quare fiet fecundus terminus = 18'', tertius = 12'', & terminis celerius femper decrefcentibus cenferi poterit tota fæcularis æquatio = 55''.

Corollarium Nonum.

Si Venus ejufdem maffæ ftatuatur cum Terra noftra, ficuti ejufdem foliditatis eft, & fiat $p = -\frac{47}{100}$, $\frac{\varphi}{b} = \frac{168}{10000}$ $= \frac{1}{60}$, $\frac{\varpi}{b} = \frac{52}{10000} = \frac{1}{192}$, pofitis diftantiis mediis 10, & 7, earumque radicibus 3.2, & 2.7, fiet una Veneris revolutione periodicum tempus Terræ ad primam partem æquationis, qua actione Veneris augetur, ut

320000000:

$320000000 : 9 . 7 . 27 . 6 . \frac{1}{60} . \frac{1}{192} . \frac{44}{7} . \frac{47}{100} . \frac{1}{2}$
& integro sæculo, sive revolutionibus Veneris 160, evadet $= 22''$. Si juxta eamdem regulam augeatur pariter æquatio in ratione subduplicata perioditorum temporum Terræ, & Veneris sive in ratione $\sqrt{12}$, $\sqrt{7\frac{1}{2}} = \sqrt{8} : \sqrt{5} = 14 : 11$, fiet $= 27\frac{1}{2}''$. Jam vero primus terminus æquationis ad secundum se habet ut $400 : 245$, & secundus ad tertium ut $1600 : 1029$. Erit igitur secundus terminus $= 16\frac{1}{2}''$ tertius $= 10\frac{1}{2}''$, & tota simul æquatio, qua actione Veneris periodicum tempus Terræ singulis sæculis augetur, censeri poterit $= 65''$.

COROLLARIUM DECIMUM.

Quod si orbita Veneris ad Jovis orbitam referatur, & fiat $p = -\frac{9}{10}$, $\frac{\phi}{b} = \frac{52}{51980} = \frac{1}{1000}$, $\frac{\varpi}{b} = \frac{1}{21}$ erit singulis Jovis revolutionibus motus medius Veneris ad æquationem ex Jovis actione ortam ut

$16 . 52 . 720000000 : 9 . 11121 . 7 . 27 . \frac{1}{21000} . \frac{44}{7} . \frac{27}{10}$
$= 2143400000000000 : 89179299$.

Pariter quia Aphelium Veneris a Terræ Perihelio distat circiter 28°, cujus sinus est $= 0 . 47$, erit motus medius ad æquationem, quæ annis singulis ex Terra orietur, ut

$16 . 320000000 : 9 . 6 . 7 . 27 . \frac{1}{60} . \frac{1}{192} . \frac{44}{7} . \frac{47}{100} . 3$
$= 81920000000000 : 125631$.

Unde intelligitur neque ex Jove, neque ex Terra motum medium Veneris sensibiliter integro etiam sæculo perturbari.

Corollarium Undecimum.

Denique ſi orbitam Mercurii ad Jovis orbitam referamus, ſtatuamuſque $p = -\frac{9}{10}$, $\frac{\bullet}{b} = \frac{810}{51980} = \frac{1}{64}$, manentibus cæteris ut ſupra, erit motus medius Mercurii ad æquationem, qua ſingulis Jovis revolutionibus imminuetur, ut

$$16 . 52 . 720000000 : 9 . 11121 . 3 . 17 . \frac{1}{64} . \frac{1}{21} . \frac{44}{7} . \frac{27}{10}$$

$$= 4 . 52 . 800000000 : 10089 . \frac{17}{64} . \frac{3}{7} . \frac{11}{7}$$

$$= 52183040000000 : 66149929$$

& fiet una Jovis revolutione æquatio medii Mercurii motus immiuuti $= \frac{8573030798''}{5218304000000}$ & integro ſæculo $= \frac{7144192332''}{5218304000}$ $= 1\frac{1}{3}''$. Actio Terræ in Mercurium integro etiam ſæculo nullam gignet ſenſibilem medii motus æquationem.

Corollarium Duodecimum.

Actio autem Veneris ſenſibiliter motum medium Mercurii augebit. Et quidem ſi fiat $p = \frac{4}{5}$, $\frac{\bullet}{b} = \frac{810}{7233} = \frac{1}{9}$, $\frac{\bullet}{b} = \frac{52}{7233} = \frac{1}{139}$, & Venus ejuſdem maſſæ, denſitatiſque ſtatuatur cum Terra noſtra, erit ſingulis ipſius revolutionibus motus medius Mercurii ad primum terminum æquationis, qua augetur, ut

$$16 . 7 . 27000000 : 9 . 6 . 3 . 17 . \frac{1}{139} . \frac{1}{9} . \frac{44}{7} . \frac{12}{5}$$

$$= 16957500000 : 187$$

& fiet una Veneris revolutione idem terminus $= \frac{242352''}{16957500}$,

& revolutionibus Veneris 160, ſive integro ſæculo $= \frac{3877632''}{1695750}$

$= 2$

$= 2\frac{1''}{4}$, & si eodem modo augeatur in ratione $\sqrt{365} : \sqrt{224}$ $= 19 : 15$, evadet $= 2\frac{11''}{15}$. Primus vero æquationis terminus ad secundum se habebit ut 196:75, adeoque erit secundus terminus $= 1''$. Itaque, censeri poterit medium Mercurii motum, actione Veneris 4'' singulis sæculis augeri.

S C H O L I O N.

Quod si jam demum theoriam cum observationibus conferre licet, Keplerus ab anno usque 1625 imminutam Saturni celeritatem, & Jovis celeritatem angularem circa Solem auctam fuisse agnovit. Flamsteedius cum anno 1683 in Transactionibus Philosophicis de conjunctione Jovis, & Saturni ageret animadvertit hujus Planetæ motum medium justo quidem celeriorem in tabulis constitui, illius vero tardiorem. In Monumentis Regiæ Parisiensis Academiæ anno 1718 de correpto periodico Jovis tempore plura recensuit Maraldus, quæ huc redeunt. Comparando conjunctionem Jovis cum Asino Australi, quæ 240 annis ante Christum observata est, cum alia conjunctione a Maraldo observata Decembri mense anno 1717, prodit singulis annis 83 Jovis acceleratio supra septem revolutiones 4' 16''. Comparando conjunctionem cordis Leonis observatam Athenis anno 508 cum observationibus a Walthero habitis anno 1503, prodit acceleratio media eodem tempore 2' 26'': eamdem vero conjunctionem illam comparando cum conjunctione stellæ Geminorum juxta Waltherum octavæ, & juxta Bouillaud duodecimæ, quæ conjunctio observata est anno 1504, prodit acceleratio 3' 8''. Accelerationum hujusmodi, quæ ex collatione observationum veterum, ac recentiorum prodeunt, adeo parvam differentiam Maraldus partim tribuendam censuit errori veterum, qui nondum filis in foco ocularis, & objectivæ lentis Telescopii positis utebantur pro accurate determinando conjunctionis tempore, partim etiam incertæ methodo reducendi motus medios ad veros. Jam vero longe major accelera-

tio

tio eruitur recentioribus obſervationibus collatis inter ſe invicem. Comparando conjunctionem Jovis cum ſtella Regulo, quam obſervavit Bouillaud die 12 Octobris anno 1623 cum ſimili conjunctione menſis Octobris anni 1706, prodit ſingulis annis 83 acceleratio media Jovis ſupra ſeptem revolutiones 21′. Comparando conjunctionem Jovis cum ſtella frontis Scorpii in Batavia ab Hortenſio obſervatam anno 1627; & ab Elia a Leonibus in Germania, cum ſimili conjunctione Jovis obſervata anno 1710, prodit acceleratio 12′ 50″. Comparando obſervationes a Gaſſendo habitas anno 1633 menſe Decembri cum aliis obſervationibus anni 1716, prodit acceleratio 15′. Comparando denique locum Jovis anno 1634 die 12 Aprilis a Gaſſendo obſervatum Dinii cum loco alio, quem Maraldus anno 1717 in Pariſienſi obſervatorio determinaverat, rurſus prodit acceleratio 15′.

Quæ vero ad retardatum motum Saturni pertinent a Monnierio in ſuis Aſtronomicis Inſtitutionibus ſimul congeſta ſunt. Comparando obſervationes Hevelii anni 1672 cum aliis anno 1731 habitis, motus medius Saturni ſingulis annis Julianis 59, & uno die prodit duarum revolutionum 1° 44′ 50″. Kepleri, & Streetii tabulæ eodem tempore motum medium Saturni $7\frac{1}{2}'$ celeriorem ſtatuunt. Obſervationes annorum 1686, & 1745 inter ſe comparatæ, annis Julianis 59, & uno die exhibent motum medium duarum revolutionum, & 1° 39′ 2″: ſcilicet 6′ breviorem, quam ex prioribus obſervationibus prodierit. Conſiderandum eſt autem obſervationum priorum tempore Saturno fere oppoſitum fuiſſe Jovem, anno 1686 diſtaſſe a ſe invicem duos Planetas $47\frac{1}{2}°$, & 40° anno 1745: quod plane indicat inæqualitatem Saturni aliam ſæcularem eſſe, aliam quæ pendet ex vario aſpectu Jovis. Anno 1686 error tabularum erat 21′ 9″, & 36′ 12″ anno 1745. Anno 1716 duobus jam dictis intermedio cum error 28′ eſſe debuiſſet, 36′ inventus eſt. Cui porro cauſſæ, ut notat Cl. Alembertius *par.* 2. diſquiſitionum de Mundi ſyſtemate *num.* 245, diſcrimen 8′ tribuendum eſt niſi Jovi,

qui

qui anno 1716 tribus signis a Saturno distabat, dimidio scilicet signo magis quam aliis duobus annis? Et plane comparando observationes eodem aspectu habitas evanescit hæc inæqualitas, & est error annorum numero proportionalis. Anno 1598 erat error tabularum 2', $20\frac{1}{2}'$ anno 1657, & $36\frac{1}{3}'$ anno 1736. Anno 1583 tempore conjunctionis Jovis, & Saturni error tabularum defectu erat 3' 10'', anno 1642 erat $7\frac{1}{3}'$ excessu, & anno 1702 erat $16\frac{1}{3}'$ excessu pariter: Planetis in tribus casibus eamdem fere configurationem retinentibus. Quo patet ab anno 1583 tabularum Saturni errorem esse 10' singulis annis 59, & bis mille annis, quod est tempus vetustissimæ observationis a Ptolemæo recensitæ usque ad 6° assurgere: quæ plane quantitas major est, quam ut in veterum Astronomorum incuriam, & indiligentiam potius quam in Physicam Saturni retardationem refundi possit. Fuit enim illa observatio conjunctionis Saturni cum stella γ humeri Australis Virginis, quæ 6° vere a Saturno distare non poterat quando conjuncta primis Astronomis videbatur.

Hireus in tabulis Astronomicis statuit motum medium Saturni dumtaxat 6'' annis singulis, & 1° 40' imminui tempore annorum mille. Hoc dato suas, Tychonicasque observationes conciliavit inter se invicem: veteres autem illas, quæ 2°, aut 3° a suis dissentiebant, veluti indiligentes, ac dubias penitus dereliquit. Hallejus omnibus perpensis censuit motum medium Jovis augeri 57', & motum medium Saturni 2° 19' imminui singulis annis mille, æquationesque esse semper ut quadrata temporum. Cassinus denique in Monumentis Parisiensibus anni 1746 voluit annis singulis 30''' augeri motum medium Jovis, & 11'' imminui motum medium Saturni: scilicet æquationes esse 8' 20'', & 3° 3' 20'' annis mille. Jam vero juxta gravitatis theoriam, & *Coroll.* 3., & 4. non computata Satellitum actione prodiret incrementum medii motus Jovis, pro varia densitatis Saturni hypothesi, 200'', aut 270'': & si quinque simul Satellites eamdem quanti-

tita-

titatem materiæ cum Saturno ipso complecterentur, quod non adeo a ratione alienum videri posset, ea prodiret æquatio quæ cum Cassini sententia conveniret. Motus autem medius Saturni non nisi uno gradu singulis annis mille imminueretur. Id etiam aliis calculis ex theoria gravitatis eruit Cl. Alembertius, qui *num.* 239, de Mundi systemate 100" æquationem eamdem singulis Saturni revolutionibus esse comperit. Dimidio augeri posset æquatio si quantitas materiæ in quatuor Jovis Satellitibus foret illius dimidia, quæ in Jove est: quod tamen minus recte assumeretur cum massa Jovis quadruplo fere massam Saturni excedat. Itaque aut non satis adhuc comperta censeri debent elementa theoriæ Jovis, & Saturni, aut si demum Astronomorum industria æquationes mediorum motuum Saturni, & Jovis accurate determinentur, & multo majores prodeant, quam ferant superiores calculi, extra Planetarium systema totius inæqualitatis caussa quærenda erit, videndumque utrum Jupiter, & Saturnus cum motus Cometarum perturbent sensibiliter, vicissim etiam a Cometis sensibiliter in suis motibus perturbentur.

Motus medii Martis, & Veneris juxta leges gravitatis satis constantes, ac regulares sint oportet. Etenim juxta *Coroll.* 5. & 6. medius motus Martis iisdem fere æquationibus augebitur singulis sæculis actione Jovis, & actione Terræ imminuetur: & juxta *Coroll.* 10. actio Jovis, & Terræ nullam gignet sensibilem medii motus Veneris æquationem. Id etiam observationibus Astronomicis conforme est. Equidem Hircus in tabulis animadvertit epocham motum mediorum Veneris a Keplero $13\frac{1}{4}'$ plus justo promotam esse: minime vero determinavit utrum differentia adeo exigua retardationi motus Veneris potius quam incertitudini veterum observationum a Keplero inter se collatarum tribuenda sit. Alii Astronomi inferiores Planetas præ superioribus magis regulares esse in suis motibus observarunt, sicuti priores Jovis, & Saturni Satellites magis regulares sunt quam Satellites alii remotiores. Hallejus in tabulis cum æquationes sæculares Saturni, Jovis, & Mercurii supputasset, nullam

Mar-

Martis, & Veneris fæcularem æquationem exhibuit. Et quidem tabularum Halleji, obſervationumque differentia in oppoſitionibus Solis, & Martis ſemel tantum ad 1' 6'' uſque aſcendit, in ea ſcilicet, quæ die prima menſis Decembris anno 1659 contigit. In 29 ſequentibus oppoſitionibus error omnis uno minuto ſemper major eſt, & quandoque aliquot tantum ſecundorum.

Ad Solarem annum quod pertinet, Hallejus inæqualitatem aliquam motuum mediorum Solis jam indicavit anno 1693 in notis ad obſervationes Albategnii, quæ *num.* 204. Tranſactionum Philoſophicarum inſertæ ſunt. Alii vero ſic annum Tropicum medium definiunt. Ricciolius *lib.* 1. Aſtronomiæ *cap.* 4. ex vetuſtiſſimis Hipparchi obſervationibus juxta refractionis leges correctis, & tempore Æquinoctii anno 1655 Bononiæ a ſe obſervati eruit Solarem annum 365 dierum, 5 horarum, 48' 48''. Tycho, Keplerus, Flamſteedius, & Newtonus ſcrupulis aliquot ſecundis annum Solarem longiorem ſtatuunt. Si cum aliis recentioribus obſervationibus quæ a Walthero inſtitutæ ſunt decimo quinto ſæculo exeunte comparentur, prodit Solaris annus 365 dierum, 5 horarum 48' $46\frac{1}{2}''$. Caſſinus cum in tabulis Aſtronomicis poſuiſſet annum 365 dierum, 5 horarum 48' 52'', ex pluribus tamen Æquinoctiis, quæ Vraniburgi, Bononiæ, & Lutetiæ Pariſiorum determinaverat, annum Solarem ſtatuit medium inter $365^d\ 5^h\ 48'\ 47''$, & $365^d\ 5^h\ 48'\ 35''$, ſive eſſe proxime $365^d\ 5^h\ 48'\ 41''$: quam quidem anni definitionem tanto accuratiorem exiſtimat Caillius quanto in tribus iis locis certius innoteſcit Poli altitudo, ex qua Æquinoctii, & Solaris anni determinatio pendet maxime. Ipſe autem Caillius in Monumentis Academiæ anni 1750 cum quatuor obſervationes a ſe inſtitutas cum alia obſervatione die 1 Aprilis anni 1669 a Picarto habita comparaſſet, Solarem annum determinavit $365^d\ 5^h\ 48'\ 30''$, breviorem ſcilicet $27\frac{1}{2}''$, quam Newtonus, & Flamſteedius ſtatuerant. Deinde cum eaſdem ſuas obſervationes comparaſſet cum alia a Picarto inſtituta die 5 Aprilis anno 1681, Solaris

O an-

anni quantitatem eruit $365^d\ 5^h\ 48'\ 50\ \frac{5}{2}''$, & medium accipiendo censuit $365^d\ 5^h\ 48'\ 40''$. Animadvertit etiam quod si ex errore observationum differentia omnis profluxisset, plus quam minuto uno ac dimidio in singulis observationibus, quæ ad se invicem referebantur, peccatum esset, & $39'\ 25''$ in intervallo temporis ipsis observationibus interjecti. In Lectionibus Astronomicis Caillius ipse, comparatione observationum, a se quidem anno 1749, & anno 1657 a Cassino die 28 Martii institutarum Solarem annum determinavit $365^d\ 5^h\ 48'\ 43''$. Quare observationibus omnibus satis conforme videri potest, quod Eulerus in suis opusculis censuit, Solarem annum $5''$ temporis singulis sæculis corripi.

Jam vero si quantitatem materiæ in Sole, Jove, & Terra statuamus 10000, 11. 121, 0.06, intelligamusque densitates Veneris, Terræ, & Martis inter se esse in subduplicata ratione periodicorum temporum reciproce, corripietur $43''$, & $55''$ actione Jovis, & Martis anni Solaris quantitas, & $65''$ actione Veneris singulis sæculis augebitur, juxta *Coroll.* 7., 8., & 9. Si densitatem Veneris $\frac{1}{3}$ majorem esse intelligamus æquatio evadet $87''$, unde densitate Martis paulo imminuta illud Solaris anni decrementum habebimus, quod cum observationibus conveniet. Hac etiam posita hypothesi fiet sæcularis æquatio medii motus Mercurii, quæ ex Venere oritur $5\frac{1}{3}''$. Quare subducta æquatione, quæ ex Jovis actione pendet, supererunt $4''$ pro totali incremento medii Mercurii motus. Hallejus cum anno 1723 Mercurii per Solem transitum Grenovicii accuratissime observasset, suasque & alias aliorum Astronomorum observationes summa diligentia comparasset inter se invicem, censuit quantitati medii motus Mercurii $20''$ addenda esse singulis annis centum. At Eustachius Manfredius cum ejusdem congressus observationes Bononiæ a se institutas comparasset cum aliis, quæ occasione alterius congressus Lutetiæ Parisiorum anno 1631 a Gassendo habitæ fuerant, invenit motum medium Mercurii non nisi

qua-

quatuor, aut quinque ſecundis in anno communi adeoque ſingulis ipſius Mercurii revolutionibus non niſi 1'' circiter majorem eſſe nunc temporis quam in Rudolphinis, Ricciolianis, & Hireanis tabulis ſtatuebatur. Vide Comment. Bonon. Scient. Academiæ *to.* 2. *par.* 3. Quæ modo ex legibus gravitatis eruta eſt æquatio quadruplo major eſt quam Manfredius, & quintuplo minor quam Hallejus ex obſervationibus collegerant. Porro qua ratione intelligitur velocitatem projectionis Terræ, & quantitatem anni Solaris imminui paulatim ſucceſſu temporis, percipietur etiam imminui tempus periodicum revolutionis Lunæ, & motum medium augeri oportere: quod Halleji, & Newtoni obſervationibus conforme eſt.

APPENDIX

DE MOTIBUS APPARENTIBUS

PLANETARUM.

Quoniam præcipuas Planetarum inferiorum, superiorumque inæqualitates, quæ ex mutua attractione pendent, in orbitis circularibus, atque ellipticis investigavimus, ne quidpiam in universa cælesti Physica desideretur, quod ad notissimorum phænomenorum explicationem conducat maxime, operæ pretium erit alias etiam attingere aberrationes motus, quæ mere apparentes sunt, & inæqualitates opticæ dici possunt. Eæ vero ad duas classes potissimum reducuntur. Aliæ enim sunt, quæ pendent ex vario telluris loco in sua orbita, & quibus fit ut Planetæ tardiores, celerioresque, directi, retrogradi, & stationarii aliquando videantur. Aliæ ex finita proportione velocitatum Terræ, & lucis pendent: qua quidem finita proportione fit ut non in Stellis fixis dumtaxat, verum etiam in Planetis omnibus, Cometisque, certæ, ac regulares aberrationes motus exoriantur. Utrasque modo appendicis, & coronidis loco exhibebimus, quoniam directionum, & retrogra-

gradationum theoriam ruditer hactenus attigerunt, qui elementaris Aſtronomiæ principia complexi ſunt Keillius, Wolfius &c: theoria vero aberrationis lucis in Sole, Luna, & Planetis omnibus brevius, ac ſimplicius abſolvi poteſt, quam alii authores celeberrimi præſtiterint. Satis autem hic erit orbitas Planetarum veluti circulares, & concentricas Soli conſiderare. Cum enim quæ ex luce oritur aberratio adeo exigua ſit, differentia omnis quæ orietur ex orbitarum ellipticitate, ad ſenſum penitus erit nulla. Directiones vero, & retrogradationes Planetarum ad minuta uſque definire ſupervacaneum videri poſſet. Cæterum etiam ſi in hypotheſi orbitarum ellipticarum inveſtiganda eſſent omnia, calculus quidem longior, atque implexior evaderet, calculi tamen methodus ac ratio penitus eadem maneret.

Problema Primum.

Determinare apparentias motus Planetarum, quæ ex motu Terræ circa Solem proficiſcuntur.

Resolutio.

Statuatur Terra in loco *C*, Sol in *N*, Planeta vero in *E*, *fig.* 13., & quo tempore juxta tangentem orbitæ motum ſuum proſequendo Terra rectam *CD* abſolveret, poſſit Planeta abſolvere rectam *EG*. Quoniam communis motus relativos alios motus non turbat, ut ex Mechanica notum eſt, eædem adhuc apparentiæ motus habebuntur ſi intelligatur Planetis omnibus imprimi motum æqualem ipſi *ED*, parallellum directioni Terræ, & contrarium. Tum vero quieſcente Terra, & motu ad Planetas alias translato, in primis Sol ex adverſa parte moveri ſemper videbitur, eodemque tempore revolutionem apparentem circa Terram abſolvet juxta ordinem ſignorum, quo Terra revolutionem ſuam abſolvit circa Solem. Deinde ſi fiat *ET*=*CD*, & compleatur parallellogramum *ETHG*, Planeta motu compoſito juxta *EH* progredi videbitur. Ex *N* in *CE*, quæ centra Terræ, & Planetæ jungit, du-

ducatur perpendiculum NM, & ex G, & H perpendiculares aliæ GO, Hu. Producatur insuper, si opus est, GH in i, & fiat $CD=f$, $EG=c$, $CN=a$, $NP=b$, sinus anguli $ACB=t$, sinus totus $=1$. Erit $MN=at$, $CM=a\sqrt{(1-t^2)}$, $EM=\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$, & si orbitæ circulares intelligantur, ut sit angulus NEG rectus similia erunt triangula ENM, GEO, & fiet $GO=\frac{c}{b}.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$. Tum etiam ob angulos GiO, DCE MNC inter se æquales similia erunt triangula GiO, MNC, & fiet $Gi=\frac{c.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}{b.\sqrt{(1-t^2)}}$. His positis, si Planeta E inferior intelligatur, erit $CE=CM\mp ME=a\sqrt{(1-t^2)}\mp\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$, $Hi=Gi\mp GH=\frac{c\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}{b\sqrt{(1-t^2)}}\mp f$, & valebit signum superius pro prima, & inferiore conjunctione, inferius vero pro conjunctione altera. Insuper ob $CN:CM=Gi:GO=Hi:Hu$, prodibit $Hu=\frac{c}{b}.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}\mp f.\sqrt{(1-t^2)}$, & sinus apparentis aberrationis $\frac{Hu}{HC}$, aut proxime $\frac{Hu}{EC}$ fiet $=\frac{c.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}\mp bf.\sqrt{(1-t^2)}}{ba.\sqrt{(1-t^2)}\mp b.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}$. Sunt autem velocitates Planetæ, & Terræ c, & f circa Solem in ratione subduplicata distantiarum b, & a reciproce. Itaque sinus anguli aberrationis, quæ in Planeta inferiore orietur ex motu Terræ, fiet $=\frac{\sqrt{(ab^2-a^3t^2)}\mp b.\sqrt{(b-bt^2)}}{ab.\sqrt{(ab-abt^2)}\mp b.\sqrt{(ab^3-a^3bt^2)}}$. Si Planeta E sit superior, evadet $CE=\mp a.\sqrt{(1-t^2)}+\sqrt{(b^2-a^2t^2)}$, $Hi=\frac{c.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}}{b.\sqrt{(1-t^2)}}\mp f$, $Hu=\frac{c}{b}.\sqrt{(b^2-a^2t^2)}\mp f.\sqrt{(1-t^2)}$, & puncta H, G jacebunt ex adversis partibus rectæ CE in oppositione Planetæ ipsius cum Sole, & valebit signum superius pro oppositione, inferius pro conjunctione. Inde autem simili modo eruetur sinus apparentis aberrationis $=\frac{\sqrt{(ab^2-a^3t^2)}\mp b.-\mp b\sqrt{(b-bt^2)}}{\mp ab.\sqrt{(ab-abt^2)}+b.\sqrt{(ab^3-a^3bt^2)}}$. Q. E. J.

Co-

Corollarium Primum.

Hinc primo ſi ſit $t = 0$, hoc eſt ſi Terra, & Planeta ſint in eadem linea recta cum Sole, erit motus angularis inferioris Planetæ a Terra ſpectati $= \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a.\sqrt{ab} \mp b.\sqrt{ab}}$: ſcilicet ob $a > b$, circa primam conjunctionem cum Sole inferiores Planetæ progredi videbuntur ad eamdem plagam, verſus quam Tellus fertur, & cum citra Solem ſint, moveri ex Terra videbuntur ad partes oppoſitas cum Sole. Circa conjunctionem alteram ad eaſdem partes cum Sole tendent. In prima conjunctione igitur erunt retrogradi, & directi in conjunctione altera, & erit velocitas directionis ad velocitatem retrogradationis ut $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a+b} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a-b} = 1 + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} : 1$, ſive ut ſumma ad differentiam velocitatum directe, & reciproce ut ſumma ad differentiam radiorum. Id etiam patet ex ipſa conſtructione. In aliis locis quibuslibet data elongatione inferioris Planetæ a Sole inveniri poterit ſinus apparentis directionis, aut retrogradationis.

Corollarium Secundum.

In Planetis ſuperioribus ſi fiat $t = 0$ evadet ſinus apparentis aberrationis $= \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\mp a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab}}$, & cum ſit $b > a$, in conjunctione cum Sole Planetæ ipſi juxta ordinem ſignorum, & contra ſignorum ordinem tendent in oppoſitione: ſcilicet in primo caſu erunt directi, & retrogradi in caſu altero, & velocitas directionis ad velocitatem retrogradationis ſe habebit rurſus ut ſumma ad differentiam velocitatum, & reciproce ut ſumma ad differentiam radiorum. Ex ipſa etiam conſtructione patet, quod cum ſit $ET > EG$, Planeta in oppoſitione ex E in H moveri videbitur, dum vere ex E in G tendet. Circa conjunctionem alteram cum bini motus ET,

E G conſpirent inter ſe invicem, eadem erit ratio ſuperiorum Planetarum, inferiorumque.

COROLLARIUM TERTIUM.

Ut inveniatur quo in loco orbitæ habeatur ſtatio, aberrationis totius ſinus nihilo æquandus erit. Tum vero habebitur $\surd(ab^2 - a^3 t^2) + b . \surd(b - b t^2) = 0$, ſive Planetæ ſuperiores ſint, ſive inferiores, & inde eruetur $a b^2 - a^3 t^2 = b^3 - b^3 t^2$, & $t = \pm b . \surd\left(\frac{a-b}{a^3 - b^3}\right)$ pro Planetis inferioribus, pro ſuperioribus autem $t = \pm b . \surd\left(\frac{b-a}{b^3 - a^3}\right)$: qua formula duo prodibunt orbitarum ſingularum puncta, in quibus Planetæ utrimque fient ſtationarii. In Planetis inferioribus cum angulus *N C E* ſemper acutus ſit, quantitas $\pm b . \surd\left(\frac{a-b}{a^3 - b^3}\right)$ exprimet ſinum elongationis Stationarii Planetæ a Sole. In Planetis ſuperioribus erit $\pm b . \surd\left(\frac{b-a}{b^3 - a^3}\right)$ ſinus complementi ad duos rectos anguli elongationis e Terra viſæ.

COROLLARIUM QUARTUM.

Numeris in locum ſpecierum ſubſtitutis prodibit ſtationis locus. Ex. gr. in Venere cum juxta Bullialdum ſit $a = 100000$, $b = 72400$, prodibit $t = 0 . 48270$, qui eſt ſinus 28° 52′. Anno 1756 die 26 Julii Venus ſtationaria viſa eſt in diſtantia 28° 54′ a Sole. In Saturno autem cum ſit $b = 951000$, eruetur $t = 0.94651$, qui eſt ſinus 71° 11′, adeoque Saturnus fiet ſtationarius in diſtantia 108° 49′. Jupiter ſtationarius erit in diſtantia 115° circiter, & in diſtantia adhuc majore Mars. Die 8 Octobris ejuſdem anni 1756 Saturnus viſus eſt ſtationarius in diſtantia 108° 3′ 7″.

SCHO-

SCHOLION.

Formula, qua ſtationes Planetarum in ſuperiore corollario definivimus, omnino cum ea convenit, quam Hermannus exhibuit *to.* 1. *par.* 3. *num.* 7. Miſcellaneorum Berolinenſis Academiæ, & cum aliis Bernoullii, Duillierii, & Moyvræi. Hermannus etiam *to.* 2. *par.* 2. *num.* 1. ulterius progreſſus eſt, ut ſtationum puncta in orbitis ellipticis determinaverit: quod ante ipſum præſtiterat Hallejus. Et quidem ſi dato ſtationis loco quæratur quo alio in loco orbitæ ellipticæ Planeta fiat ſtationarius, facilior evadit calculus, & contra implicatiſſimis calculis opus eſt ſi generatim ſtationum puncta inveſtigentur. Nos vero ſtationum problema corollarii loco attigimus, & quæ ad apparentes motus Planetarum in hypotheſi orbitarum circularium pertinent, unica formula complexi ſumus. Ea etiam problemati aberrationis lucis, quæ in Planetis contingit, reſolvendo ſatis erit, ut mox videbimus.

Problema Secundum.

Poſito quod celeritas Terræ ad celeritatem lucis datam rationem habeat, determinare apparentes fixarum motus.

Resolutio.

Feratur Terra ex A in B, *fig.* 14., & radius lucis EBC ex ſtella E ad ſpectatoris oculum perveniat in loco B, & ſit celeritas Terræ ad celeritatem lucis ut $AB:CB$. Quia motus communis relativos corporum motus inter ſe, & viſionis phænomena non turbat; ſtatuamus & luci, & oculo ſpectatoris imprimi motum contrarium, & æqualem illi, quem habet Terra. Lux in quieſcentem oculum illabetur viribus BA, BC, completoque parallellogrammo $ABCD$, & ducta EF parallella directioni Terræ, Stella in loco F, & directione DBF videbitur, & erit BE ad EF ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ. Ex F

P in

in BA, BE, & ex E in BF ducantur perpendicula Fe, Fc, Ef. Erit angulus EFf æqualis angulo FBe, & ſimilia erunt triangula BeF, FfE, & fiet $Ef = \frac{FE \cdot Fe}{BF}$. Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum BFc, BEf erit $Ef = \frac{BE \cdot Fc}{BF}$. Erit itaque $BE : FE = Fe : Fc$, ſive erit celeritas lucis ad celeritatem Terræ ut ſinus anguli FBe ad ſinum anguli FBc: quod eſt ipſum Cl. Bradley theorema. Quod ſi igitur pari ratione motu omni ad ſtellam fixam, & emanantem lucem relato accipiatur ſemper $BE : EF$ ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ, & EF ſtatuatur parallella directioni motus, quem Terra juxta tangentem concipit, Stella ſemper videbitur in F, & unius anni tempore circulum FHG deſcribet plano Eclipticæ parallellum, ea quidem lege ut dum Terra erit ex plaga punctorum M, H, Stella referatur ad puncta H, & G. Recta quæ a Terra ducetur ad puncta ſingula, ob infinitam Stellæ diſtantiam, ſuperficiem coni ſcaleni deſignabit, cujus vertex erit ipſe ſpectatoris oculus. Ut ergo habeantur loca, ad quæ referetur Stella, & in cælo e Tellure ſpectabitur, ſecari intelligatur Conus in puncto E plano rectæ BE perpendiculari. Sectio erit ellipſis, cujus axis major ad minorem ſe habebit ut ſinus totus ad ſinum inclinationis rectæ BE cum baſi ejuſdem coni, ſive ut ſinus totus ad ſinum latitudinis ſtellæ propoſitæ. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si concedamus celeritatem lucis advenientis e Stellis fixis, & a Sole eamdem eſſe, & ponamus Terram motu annuo hexapedas Pariſienſes 14336 uno minuto ſecundo temporis conficere, lucem vero tempore 8' 12", aut 8' 13" conficere ſpatium Soli, & Terræ interjectum 22000 ſemidiametrorum terreſtrium mediocrium, ſive hexapedarum 22000. 3273035; erit Ff ſinus 20", aut 21". Bradlejus mediam aberrationis quantitatem obſervationibus collegit eſſe $20\frac{1}{4}''$ in

Stel-

Stellis quibusdam fixis, & 20″, aut 20 $\frac{1''}{2}$ in quibusdam aliis. Aberrationes diurnæ annuis aberrationibus tanto minores erunt quanto velocitas motus annui major est velocitate diurni motus: erunt scilicet penitus insensibiles. Si oculus spectatoris in Planetis aliis constitueretur, apparentes aberrationes eamdem sequerentur rationem velocitatis diurnæ, & annuæ. Ex. gr. cum in Æquatore Jovis velocitas diurni motus major sit motus annui velocitate, oculo ibidem posito aberratio diurna major erit aberratione annua, & ita porro.

Corollarium Secundum.

Si Stella E in polo Eclipticæ reperiatur, conus $BFNG$ rectus erit, & ellipsis apparenti motu percursa ab eadem Stella in circulum baseos facesset. Si vero stella in plano Eclipticæ collocetur, ellipsis in lineam rectam, & majorem axem abibit, & excursiones apparentes Stellæ citra, & ultra punctum E habebuntur dumtaxat in plano Eclipticæ, erroresque omnes longitudinem Stellæ afficient, non latitudinem. A plano directe ad polum Eclipticæ transeundo maxima latitudinis aberratio proportionalis erit ipsi latitudini: aberratio maxima longitudinis ubique eadem, & constans erit: in polo demum aberrationes maximæ longitudinis, & latitudinis Stellæ fixæ æquales fient inter se.

Corollarium Tertium.

Si Polus Eclipticæ sit I, *fig.* 15., $IEVA$ planum circuli per polum ipsum perpendiculariter ad Eclipticam transeuntis, T locus Stellæ dum Terra est in D, H vero dum ad C pervenit; ducta Tt ad MG normali, erit EV latitudo media Stellæ E, tV latitudo apparens in T, & Tt augmentum longitudinis. Erit etiam differentia semiaxis ME, & semidiametri TE ellipseos $MTHGN$ quarta proportionalis ad quadratum sinus totius, quadratum sinus anguli MET, aut ZAD, & differentiam semiaxium ME, HE.

Erit denique finus totus ad finum anguli MET ut $TE:Tt$, & finus totus ad finum anguli TEH, aut DAC ut $TE:tE$. Hoc ipſo longitudo, & latitudo vera Stellæ fixæ ex apparente eruetur. Data vero longitudine, & latitudine, dabitur etiam aſcenſio recta, & declinatio.

SCHOLION.

En igitur ex primis motus principiis erutum quod exemplo lapidis in navim motam projecti Euſtachius Manfredius *to.* 1. Comment. Bononienſis Academiæ, tubi mobilis Simpſonius, *Eſſays on ſeveral curious and uſeful ſubjects* &c. & tubi mobilis, ac pluviæ decidentis Cleiautius explicavit in Monumentis Pariſienſis Scientiarum Academiæ anni 1737. Ipſi etiam practicas regulas calculi Arithmetici ſingillatim tradiderunt, quibus poſtmodum ſupputatas aberrationis tabulas exhibuit Cl. Winsheim *to.* 1. Novorum Commentariorum Petropolitanæ Academiæ, quos nuper ab Imperiali Academia humaniſſime dono datos accepi. Simpſonius in eodem opere *Prop.* 2. theorema apprime elegans propoſuit, quod ſi Terra in ellipſi circa Solem moveri intelligatur, ob lucis aberrationem Stellæ fixæ adhuc circulos non concentricos, ſed excentricos deſcribent: quod quidem theorema Thomas Perellius multo ante Euſtachio Manfredio generaliter ſic conceptum communicaverat: *Si ſpectatoris oculus in ſectione aliqua Conica moveatur, ſemita fixæ cujuſcumque ſemper evadet circulus, & centrum apparentis motus aut intra, aut extra, aut in ipſa erit peripheria circuli, prout ſectio Conica aut ellipſis, aut hyperbola erit, aut parabola*. Generalem etiam theorematis demonſtrationem breviter, & Geometrice de more ſuo exhibuit Perellius. Sunt enim velocitates corporum curvam quamcumque deſcribentium reciproce ut perpendicula in tangentes demiſſa: perpendicula vero in ellipſi deſinunt ſemper in peripheriam circuli axe majore ellipſeos deſcripti: in circulo autem cum rectangula omnia rectarum in eodem puncto ſe interſecantium æqualia ſint, erunt perpendicula ipſa, ſive velocitates corporum, proportio-

tio-

tionales rectis quæ habentur tangentium perpendiculis ad oppositam usque peripheriæ circularis partem productis. Cum igitur in Stellis fixis distantiæ a centro motus ob lucis aberrationem proportionales sint iisdem velocitatibus, Stellarum semita erit circulus subverse positus, & excentricus, si spectatoris oculus ellipsim conicam circa Solem describat. Si distantiæ foci ellipseos a vertice infinitam rationem habeant inter se invicem, hoc est si ellipsis in parabolam vertatur, centrum apparentis motus erit in ipsa peripheria circuli: & ultra peripheriam cadet si parabola abeat in hyperbolam, ut ex se patet. Ubi perpendiculum, quod a fixa ad planum orbitæ ducitur, minime transeat per focum sectionis conicæ, apparens fixæ semita erit elliptica, & longitudinis, ac latitudinis aberrationes simili modo ac supra inveniri poterunt.

Problema Tertium.

Iisdem positis invenire apparentes motus Planetarum, qui ex aberratione lucis oriuntur.

Resolutio.

In primis maneat ET, ut in *fig.* 13., parallela directioni Terræ CD, accipiaturque CE ad ET ut celeritas lucis ad celeritatem Terræ, & CE ad EG ut celeritas lucis ad Planetæ celeritatem. Producatur etiam ET in t, ut sit $ET = Et$, & ex t in CE ducatur perpendiculum te. Quia per *Coroll.* 1. *Probl.* 2. celeritas lucis ad celeritatem Terræ se habet ut sinus totus ad sinum 20'', & ob maximam lucis rapiditatem Terræ celeritas ad celeritatem lucis, sive a Sole advenientis, sive a Planetis reflexæ ad sensum eamdem rationem habere debet, anguli vero exigui sunt proxime ut sinus sui, reliquis primi Problematis denominationibus retentis erit

$te = \surd(1-t^2).\,20''$, $c = \frac{\surd a}{\surd b}.\,20''$, $GO = \frac{c}{b}.\,(b^2 - a^2 t^2)$

$= \surd$

$= \frac{\sqrt{a} . \sqrt{(b^2 - a^2 t^2)}}{b . \sqrt{b}}$ 20''. His positis si Planeta motu omni destitueretur, quo tempore in *E* foret, ex Terra *C* versus *D* mota videretur in loco *t*, & esset sinus aberrationis lucis $= \pm \sqrt{(1 - t^2)}$. 20'', atque in Planetis inferioribus valeret superius signum pro prima conjunctione, & inferius pro conjunctione altera cum Sole, in Planetis autem superioribus superius pro oppositione, inferius pro conjunctione. Quod si Planeta ipse in sua orbita moveri intelligatur, quo tempore ex *E* lux ad spectatoris oculum perveniet, Planeta ex loco *E* ad *G* transibit, atque erit *G* locus verus, *t* autem apparens Planetæ locus, & differentia loci veri, & visi, sive aberratio, quæ ex luce orietur erit $= \frac{\sqrt{a} . \sqrt{(b^2 - a^2 t^2)}}{b . \sqrt{b}}$. 20'' $\mp \sqrt{(1 - t^2)}$. 20''. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Planetæ igitur inferiores ante primam conjunctionem angulum elongationis a Sole e Terra visæ aberratione lucis habebunt auctum, & imminutum post conjunctionem. Ante conjunctionem superiorem rursus augebitur ipse angulus, & post conjunctionem minuetur. Scilicet circa primam conjunctionem minuetur Planetarum retrogradatio, & apparens longitudo augebitur, circa alteram vero directio Planetarum, & longitudo apparens imminuetur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

In Planetis superioribus post oppositionem, & conjunctionem minuetur elongationis angulus, ante oppositionem vero, & conjunctionem augebitur: scilicet imminuetur in conjunctione, & in oppositione apparens Planetarum longitudo augebitur. In oppositione Planetarum superiorum, & prima inferiorum conjunctione erit angulus aberrationis $= \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)$. 20'', in aliis autem conjunctionibus $= \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)$. 20''

20'', atque erunt inter ſe aberrationes in ſimplici ratione differentiæ ad ſummam velocitatum.

Corollarium Tertium.

In Mercurio cum juxta Bullialdum ſit $b = 38806$, erit $\sqrt{ab} = 62293$, & $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right) . 20'' = \left(\frac{\sqrt{ab}-b}{b}\right) . 20'' = \frac{23487 . 20''}{38806}$ $= 6'' . 9$. Hæc erit igitur aberratio, quæ in prima conjuctione ex luce orietur. In conjunctione altera cum Sole fiet aberratio $= \frac{101099 . 20''}{38806} = 54''$. In Venere cum ſit $b = 72400$, erit pro conjunctione inferiore aberratio $= \frac{12688 . 20''}{72400} = 3'' . 5$: pro ſuperiore autem $= \frac{157488 . 20''}{72400} = 43'' . 5$.

Corollarium Quartum.

In Marte cum ſit $b = 152350$ erit aberratio $= \frac{28920 . 20''}{152350}$ $= 3'' . 7$ in oppoſitione, & in conjunctione $= 36'' . 2$. In Jove eſt $b = 519650$, & aberratio in oppoſitione $= 10'' . 6$, in conjunctione vero $= 29'' . 4$. Saturnus pariter in conjunctione a loco vero aberrabit angulo $26'' . 5$, & in oppoſitione $13'' . 5$. Patet autem quod cum ad eaſdem partes in oppoſitione moveantur Planetæ ſuperiores, & inferiores in prima conjunctione, ad quas ſi motu omni deſtituerentur communi fixarum aberratione ex motu Telluris orta deberent ferri; in caſu utroque differentia loci veri, & viſi dato quocumque tempore erit differentia duarum aberrationum quæ orientur ex motu Terræ, & Planetarum. In aliis conjunctionibus ob contrarium rationem aberrationum ſumma accipienda erit.

Corollarium Quintum.

Ex iiſdem principiis præſto erit Solis longitudinem ob lucis aberrationem conſtanter minui angulo 20''. In Luna inſenſibilis erit aberratio. In aliis Planetis omnibus, quando appa-

apparent ſtationarii omnino nullam eſſe oportere facile intelligetur. Aberrationes latitudinis, & æquationes aberrationum aliarum, quæ orientur ex ellipticitate orbitæ, in maxime excentrica orbita Mercurii erunt circiter 4″, minores ſcilicet quam ut ipſarum ratio aliqua haberi debeat. Sed neque implicatiore calculo opus eſt ſi aut longitudinis æquationes, aut aberrationes totæ latitudinis Planetarum, Cometarumque dato quocumque tempore inveſtigentur. Data enim velocitate alicujus corporis, loco, & directione motus, tota etiam datur aberratio. Videatur tamen excellens Clerautii opus de aberratione lucis, quod commentariis Pariſienſis Academiæ anno 1746 inſertum eſt, & quo ipſe primam, ac generalem horum Problematum ſolutionem exhibuit.

S C H O L I O N.

Cl. Perellius aliud theorema pro aberrationibus Planetarum, quæ ex luce oriuntur, ſupputandis mecum nuperrime communicavit. Scilicet primo inquirenda eſt aberratio Stellæ alicujus fixæ, quæ ſpectetur ex Terra noſtra, & cum Planeta aliquo, qui proponitur, conjungatur. Deinde inveſtiganda eſt aberratio fixæ alterius, quæ ex ipſo Planeta in conjunctione cum Terra videri poſſet. Duarum aberrationum differentia accipienda eſt ſi Terra, & Planeta moveantur ad eaſdem partes, ſumma vero ſi ad partes ex diametro oppoſitas moveantur. Patet enim totius quæſitæ aberrationis duas eſſe partes, quarum una ex motu Terræ, altera ex motu Planetæ oritur. Prior eadem eſt aberratio Planetæ, qui motu omni deſtituatur, aut alicujus fixæ, quæ in cælo cum Planeta conjuncta ſit. Altera eſt aberratio Terræ immobilis, atque ex Planeta viſæ, aut Stellæ quæ cum Terra conjungatur. Quod ſi vero Terra, & Planeta eamdem habeant motus directionem, aberrationes binæ fient ad eamdem partem, ad oppoſitas autem ſi oppoſita ſit utriuſque motus directio. Ita ex ſolis tabulis aberrationis lucis in Stellis fixis, Planetarum aberrationes deduci poterunt.

DE

DE MOTU DIURNO, ET ANNUO PLANETARUM.

CArtesiani Philosophi cum a vorticibus Planetas omnes deferri vellent, & in majore distantia a Sole velocitates vorticum decrescere, Planetas in locis citimis, atque extimis diversimode impulsos asseruerunt, præter motum periodicum totius vorticis, aliquem etiam rotationis motum participare. Difficultati, quæ ex lege ipsarum velocitatum, & rotationum singularum rapiditate desumi solet, voluit occurrere Cassinus Filius Atmosphæram Planetarum ad ea usque loca extendendo, in quibus differentia velocitatum totius vorticis par esset inducendæ celerrimæ vertigini, quam in Marte, Terra, & Jove deprehendimus. At præter quam quod nimium ampla Planetarum Atmosphæra statueretur, & extremis in locis rarior, quam ut posset receptum motum ad Planetas usque transfundere; accedit, quod Villemotio Hirius opposuerat, diurnum motum in hac hypothesi non ab Occidente in Orientem, sed ab Oriente in Occidentem debere fieri. Nam si in locis inferioribus tardior, & velocior est Planeta in superioribus, quam circumfusa vorticis materia, ab inferiore ipso hemisphærio ad superius refluet, & contrarium motum communicabit. Si eam vorticum velocitatem Cartesiani esse vellent, quam solam haberi posse Alembertius demonstravit, & quæ in ratione simplici distantiarum augetur, tuerentur utique directionem diurni motus, at simul etiam agnoscerent suos vortices servandæ legi temporum periodicorum, deferendisque Planetis penitus esse impares.

Ipse etiam Alembertius, §. 419. de fluidis, eam Mairani hypothesim reprehendit, qua cum Planetæ partem obversam centro graviorem esse intelligeret, levioremque aliam, quæ aversa est, censuit plus efficaciæ in superiore hemisphærio habere materiam subtilem, & perpetuam circulationem hoc modo gignere: dato enim quod ex majore vi centrifuga fluidi, in quo mergitur inferius hemisphærium majorem gravitatem adipiscatur, partes omnes a centro vorticis æqualiter dissitæ eodem modo gravitare debent, & in directum urgeri semper secluso motu circulari. Difficultates alias adjecerat Joannes Bernoullius, *par.* 3. Cælestis Physicæ, ex modica gravitatis diversitate, & maxima Planetarum velocitate circa centrum derivatas. Is vero cum Planetarum circa Solem deferendorum munus Solari vortici non tribueret, & pluviam quamdam statueret particularum lucis in vorticis confinio compactarum, & torrentis modo relabentium in Solem ipsum, ex eadem pluvia diurnum motum oriri censuit quatenus scilicet anteriores Planetæ partes luci relabenti obviam fierent, posteriores vero ipsius ictibus sese eriperent. Quo plane quid sibi voluerit vir clarissimus non intelligo: dato enim quocumque tempore Occidentalis, & Orientalis cujuscumque Planetæ pars eodem numero particularum relabentium, eademque vi impelleretur, neque aliquis motus vertiginis haberi posset.

Optime vero in suis Propositionibus Mechanico-Dinamicis *num. xxxiv. & sequ.* Johannes idem Bernoullius animadvertit eamdem esse caussam diurni, quæ annui motus Planetarum. Cum enim ante ipsum omnes Mechanicæ scriptores motus corporum explicaturi non nisi aut puncta indivisibilia consideraverint, aut corpora, quorum gravitas in centro coacta esset; primus omnium Bernoullius Mechanicam corporibus quibuscumque, ut vere sunt, gravibus, & extensis aptare docuit: quod alii postmodum argumentum, atque in primis Eulerus, & Alembertius felicissime prosecuti sunt. Huc autem redeunt quæ a Bernoullio inventa, & demonstrata sunt. Si corpus aliquod BTZ, *fig.* 16., impellatur vi aliqua LP, quæ non transeat per centrum gravitatis E; primo

mo oſcillari incipiet totum corpus circa punctum aliquod *D*. Centrum ipſum primæ, & ſpontaneæ rotationis *D*, erit in recta *BG*, quæ tranſibit per centrum gravitatis *E*, & per punctum *L*, cui vis prior impreſſa eſt. Denique centrum ſpontaneæ rotationis ſic comparatum erit, ut corpus ex *D* ſuſpenſum, centrum oſcillationis habeat in *L*: aut, quia demonſtrante Hugenio punctum ſuſpenſionis, & centrum oſcillationis in pendulo compoſito converti poſſunt, ut corpus ex *L* ſuſpenſum centrum oſcillationis habeat in *D*. His autem poſitis manifeſtum eſt quod cum centrum gravitatis ea velocitate, quam ſemel concipit, progredi debeat in directum, totum corpus velocitate *EF* in directum moveri perget, differentia vero velocitatis in punctis ſingulis concipiet motum alium rotationis. Punctum *D* quod velocitatem circulatoriam habebit æqualem illi, qua centrum gravitatis progredietur, deſcribet in unaquaque revolutione vulgarem Epicycloidem, cætera vero puncta Epicycloides alias pro varia a centro diſtantia correptas, aut oblungatas.

Facile etiam determinabitur punctum *L*, cui vis prima applicanda erat in ſingulis Planetis, ut ea prodiret celeritas rotationis, & projectionis, quam exhibent obſervationes. Statuamus enim *D* fuiſſe centrum ſpontaneæ illius, & a Planetis primo conceptæ rotationis. Erit peripheria ad radium ut ſpatium a centro *E* una Planetæ revolutione percurſum circa Solem ad *ED*. Tum ſi Planeta aut ſphæricam figuram habeat, aut ſphæricæ ſatis accedentem, accipiendo ex regulis Hugenianis duas quintas partes tertiæ proportionalis ſpatio *DE*, & Planetæ radio, pro diſtantia *LE* obtinebimus duas quintas partes producti ex quadrato radii Planetæ ipſius in peripheriam, diviſi per radium ductum in *ED*. Ita ſi in Terra noſtra aſſumamus mediocrem radium Pariſienſium hexapedarum 3273035, & diſtantiam mediocrem a Sole circiter 22000 ſemidiametrorum hujuſmodi, erit tota orbis annui perimeter hexapedarum 452418535910: quæ quoniam circiter 31556920 ſecundis temporis abſolvitur; erit ſpatium a centro Terræ horis 23, 56′ 4″ ſive 86164″, una ſcilicet ſyderea die circa Solem confectum hexapedarum

 1235297079,

1235297079, *ED* vero 196606258, hoc eſt fere 60 non diametrorum ut *num. xxxvii.* aſſeruerat Bernoullius, ſed ſemidiametrorum terreſtrium. Erit demum *L E* hexapedarum 21886, ſeu circiter $\frac{1}{150}$ ſemidiametri ipſius, quemadmodum in eodem loco Bernoullius determinaverat. Simili methodo invenit ipſe in Marte, & Jove vim priorem ad diſtantiam $\frac{1}{418}$, $\frac{7}{19}$ a centro imprimi oportuiſſe ut ea prodiret, quæ obſervationibus deprehenditur, motus diurni, & periodici proportio.

Ego cum aliquot ab hinc annis argumentum idem excolere cæpiſſem in aliud plane elegans theorema incidi, quo illuſtrari diurni, & annui motus relationem, & ſimul etiam Mechanicam corporum magis promoveri poſſe exiſtimabam: quod ſcilicet ſi vis aliqua corpori alicui imprimatur, & directione ſua non tranſeat per centrum gravitatis, uterque motus, qui ſuborietur, projectionis, & rotationis ſic comparabitur, ut motus rotationis idem ſit ac ſi fixum eſſet centrum gravitatis, & nullus fieret motus projectionis, motus vero ipſe projectionis ſit idem ac ſi vis omnis parallella directione in centro gravitatis impreſſa eſſet, & tota in motum projectionis, ſecluſa rotatione qualibet, impenderetur. Quod a Cl. Alembertio theorema cum in nova Dinamicæ editione primo propoſitum, demonſtratumque invenerim, demonſtrationem tamen, quæ mihi antea exciderat, & quæ breviſſima, & ſimplex eſt, hic adjiciam. Nihil autem ex Johanne Bernoullio hic præmittam, niſi quod duplici ratione demonſtravit ipſe citato in loco, quod ſcilicet centrum primæ, & ſpontaneæ rotationis in illa ſemper diametro gravitatis reperiatur, in cujus aliquo puncto vis prior impreſſa eſt.

THEOREMA.

Si corpori cuicumque *BZGT*, *fig.* 16., & in puncto quocumque *L* diametri *BG* tranſeuntis per centrum gravitatis *E*, vis aliqua *LP* perpendiculariter imprimatur; dico 1°. quod totum corpus duplicem motum projectionis, & rota-

ta-

tationis circa gravitatis centrum concipiet : 2°. quod motus projectionis quantitate idem erit, ac si vis tota in centro ipso impressa esset, & directione sua directioni vis impressæ parallellus : 3°. quod motus rotationis idem erit ac si centrum gravitatis fixum maneret, & nullum projectionis motum corpus acquireret.

DEMONSTRATIO.

In primis manifestum est, quod vi impressa totum corpus oscillari incipiet circa punctum aliquod D, & diameter BG in AI abibit, & erit FE spatium a gravitatis centro absolutum. Ducatur per punctum F, *fig.* 17., recta CH priori BG parallella. Erit velocitas puncti cujuscumque $M = MN = MO \pm NO = FE \pm \frac{HI \cdot FO}{FH}$, prout scilicet punctum M aut citra, aut ultra centrum gravitatis cadet. Jam vero, ob proprietatem ejusdem centri, summa omnium $M \cdot FO$ utrimque æquari debet. Itaque cum ratio $HI : FH$ sit constans, diametri BG puncta omnia duplicem motum concipient, unum communem centro gravitatis, alterum proportionalem distantiæ a centro, tendentem in contrarias partes hinc inde, & qui priorem motum minime afficiet. His prænotatis.

Pars prima. Quia puncta omnia diametri BG non possunt communi motu FE in directum promoveri, nisi etiam totum corpus eadem velocitate projiciatur, nec possunt velocitate proportionali distantiæ a centro gravitatis circa centrum ipsum revolvi, nisi etiam totum corpus idem rotationis suæ centrum habeat; patet primo quod corpus duplicem motum concipiet unum projectionis, & alterum rotationis circa centrum gravitatis. Quod erat primum.

Pars altera. Porro si centrum primæ, & spontaneæ rotationis D fixum esset, momenta vis prioris quomodocumque applicatæ in L, aut E proportionalia essent distantiis DL, DE a puncto D, & eadem semper esset velocitas centri gravitatis, sive vis ipsa in L, sive in E imprimeretur.

tur. Rurſus ſi punctum $\mathcal{D}$ fixum eſſet, & vis imprimeretur in centro E, eamdem velocitatem centrum ipſum acquireret, qua totum corpus libere projiceretur. Itaque motus projectionis ſemper erit idem, ac ſi in centro gravitatis, directione parallella, imprimeretur vis omnis, & nullus haberetur motus rotationis. Quod erat alterum.

Pars tertia. Denique ſi vis omnis in puncto L imprimeretur, & primo centrum gravitatis E, tum vero centrum ſpontaneæ rotationis $\mathcal{D}$ fixum intelligeretur, eſſent momenta inter ſe ut LE, $L\mathcal{D}$, & differentia momentorum eſſet $\mathcal{D}E$. At vero momento $\mathcal{D}E$ gignitur velocitas EF, quæ gravitatis centro, & particulis omnibus eſt communis, ſive gignitur motus projectionis. Momentum igitur, quod in motum rotationis impenditur, ſemper eſt idem, adeoque eadem etiam eſt rotatio, ſive punctum E fixum ſit, ſive libere totum corpus eadem vi in eodem puncto L impellatur. Q.E.D.

Corollarium Primum.

Si vis aliqua diametro BG imprimatur in puncto L directione obliqua $\mathcal{P}\mathcal{Q}$, & in duas reſolvatur $L\mathcal{P}$, $L\mathcal{Q}$, altera $L\mathcal{Q}$ cum tranſeat per centrum gravitatis, tota impendetur in motum projectionis, prior vero $L\mathcal{P}$ eumdem motum projectionis gignet, ac ſi in centro E impreſſa eſſet. Itaque centrum gravitatis motu compoſito feretur juxta lineam lineæ $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ parallellam, eademque ſemper velocitate, quodcumque ſit punctum L. Quod ſi directio vis impreſſæ plano alicui propoſito BTZ obliqua fuerit, referenda erit ad planum aliud, quod per centrum gravitatis tranſeat, & in quo jaceat linea directionis, atque eadem rurſus theoremata habebuntur.

Corollarium Secundum.

Si vis quæ corpori imprimitur ex impactu alterius corporis ortum ducat, reſolvenda eſt in duas alias, quarum una tangenti impulſi corporis parallella ſit, altera vero in ipſo impactus puncto perpendicularis. Priore vi impellens corpus nullum

mo-

motum communicabit: altera, si per centrum corporis impulsi transeat, solum communicabit motum projectionis. Ita quia perpendiculares omnes superficiei cuicumque sphæricæ per centrum gravitatis transeunt, sphæra ab aliis corporibus utcumque impulsa solum projectionis motum adipiscetur. Si quæ tangenti corporis perpendicularis est vis minime transeat per centrum gravitatis rursus resolvenda erit in duas, quarum una transeat per centrum ipsum, & projectionis motum dumtaxat gignat, altera gignat simul motus projectionis, & rotationis, ut antea dictum est.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si vis, quæ superficiei extimæ imprimitur, tota in corpus transeat, ex. gr. si filo alicubi in superficie ipsa alligato trahatur corpus, & producatur directio fili quousque diametro alicui BG perpendiculariter occurrat in puncto L; eodem modo aget vis, ac si in puncto L impressa esset. Quod si minime coincidant puncta L, & E, duplex semper projectionis, & rotationis motus habebitur, & centrum gravitatis E in directum feretur per lineas directioni totius vis impressæ parallellas. Ita etiam in sphæra duplex motus unica vi obtineri poterit. Eruetur autem superioribus regulis LE, & data LE innotescet angulus, quem vis impressa cum radio sphæræ, ubi imprimitur, debet efficere directione sua, ut data emergat proportio velocitatis rotationis, & projectiones. In Jove ex. gr. erit angulus ipse $21^{\circ}\ 19'$, & in Terra $23'$ circiter.

SCHOLION.

Ope hujus theorematis, & alterius, quod parte prima dissertationis de vicissitudinibus Diurni motus *Propos. x.* demonstravimus, inveniri poterit motus, quem corpus quodlibet impressis viribus quibuscumque primo debet concipere. Diximus enim quod si corpori alicui binae vires imprimantur, quarum una circa unum axem, altera circa alterum singillatim

latim rotari inciperet, compositis simul viribus, & rotationibus, circa axem tertium totum corpus revolvetur, eruntque sinus deviationis novi axis a prioribus duobus reciproce proportionales velocitatibus, quas punctum aliquod in communi sectione duorum Æquatorum distinctis rotationibus præseferret. Id autem breviter ex eo deduximus quod in novo axe velocitates oppositae se destruant, in aliis vero punctis vires omnes componant velocitatem proportionalem distantiae ab axe ipso, & rectae ad axem ductae sua directione perpendicularem. Idem etiam theorema cum maxime implexis Physicae caelestis casibus aptaverimus, theoriae nimirum praecessionis Æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis, easque ipsas habuerimus aequationes, quae alia prorsus ratione ab Alembertio, atque Eulero fuerunt erutae, novum protulimus argumentum quod compositio motus non in liberis motibus dumtaxat, verum etiam in rotationis motibus locum habeat.

DE

PAULLI FRISII
DE
METHODO
FLUXIONUM GEOMETRICARUM,
ET EJUS USU IN INVESTIGANDIS PRÆCIPUIS CURVARUM AFFECTIONIBUS
DISSERTATIO.

DE

METHODO

FLUXIONUM GEOMETRICARUM.

PARS PRIOR.

MAgnitudines omnes Geometricae fluxu, & motu continuo gigni intelliguntur. Concipiamus enim punctum aliquod *B*, *fig.* 18., moveri ex *B* in *D*: motu suo designabit rectam *BD*. Concipiamus insuper rectam *BC* supra *BD* fluere, ut sibi in toto fluxu maneat parallella. Gignetur inde superficies *BO*: & si recta *BC* ejusdem longitudinis semper maneat, gignetur parallellogrammum, quod insuper erit rectangulum si rectus fuerit angulus duas inter rectas comprehensus. Quod si dum recta *BC* supra alteram fluit ipsum etiam fluat punctum *C*, & *BC* augeatur, aut imminuatur, infiniti casus diversi haberi poterunt. Fieri enim inprimis poterit quod incrementa omnia *mc*, *fig.* 19., dum spatio quolibet *BM* promovetur recta *BC* sint spatio ipsi proportionalia: quo in casu puncta *C*, *c* in eadem erunt recta *CT*, & triangulum designabitur. Si incrementa aut decrementa constantem proportionem ipsam non servent, linea *FCL* curva erit, convexa quidem, aut concava, hujus, aut illius naturæ pro varia puncti extremi *C* acceleratione, aut retardatione. Et qua ratione fluxu lineæ intelligitur superficiem quamcumque exsurgere, eadem potest intelligi gigni corpora ex fluxu superficiei. Ut si paral-

lellogrammum supra lineam rectam feratur motu sibi semper parallello gignetur parallellepipedum, quod rectangulum erit, si parallellogrammum illud fuerit rectangulum perpendiculariter rectæ insistens, atque insuper evadet cubus si recta, & rectanguli latera inter se fuerint æqualia.

Pariter si rectangulum circa aliquod latus immobile revolvatur, revolutione absoluta habebitur cylindrus. Si triangulum rectangulum circa latus alterutrum rotetur, prodibit conus: si semicirculus, semiparabola, semiellipsis &c, sphæra, parabolois, sphærois &c prodibit. Eodemque motu, quo lineas, superficies, & solida cujuscumque generis gigni concipimus, concipere etiam possumus lineas, superficies, & solida determinatæ jam magnitudinis aut augeri, aut imminui. Ita si parallellogrammum $B\ C\ O\ D$ proponatur, *fig.* 18., & productis $B\ D$, $B\ C$ in M, & N moveatur $D\ O$ quidem supra $D\ M$, & $C\ O$ supra $C\ N$ tali ratione ut DO quantitate mo augeatur, & CO quantitate no; parallellogrammum $B\ C\ O\ D$ in majus quodlibet $B\ N\ o\ M$ abire poterit. Et si proponatur parallellepipedum $M\ C$, *fig.* 20., eodemque tempore $T\ N$ supra $N\ H$, $C\ N$ supra $N\ P$, $B\ Q$ supra $Q\ R$ fluat; ut tria parallellepipedi latera MN, DN, NQ evadant MP, DH, NR, majus parallellepipedum obtinebitur. Generatim magnitudo quælibet $xzyt$ conflata ex magnitudinibus x, z, y, t inter se ductis, quæ motu continuo augeri, aut minui intelliguntur, ipsis crescentibus aut decrescentibus crescet similiter, aut decrescet.

Hæc prima, & genuina est magnitudinum Geometricarum idea, quam summi antiquitatis Geometræ Euclides, Apollonius, & Archimedes suppeditarunt: Hanc posteriore sæculo Torricellius illustrare, atque extendere aggressus est. Extat enim ipsius epistola ad Galilæum, in qua de lineis curvis cum ageret, curvas omnes consideravit veluti duobus motibus genitas, altero æquabili, altero accelerato. Tum etiam adnotavit quod si alicubi duorum motuum proportio exprimatur duobus parallellogrammi alicujus lateribus, diagonalis positionem tangentis determinabit. Exemplum dedit spiralis Archimedeæ, in cujus origine velocitates cum ser-

vent

vent rationem radii ad peripheriam, semiordinata etiam spiralis se habet ad subtangentem ut radius ad peripheriam. Elucubraverat etiam Torricellius peculiare opus de lineis curvis, cujus fragmenta asservantur Florentiæ, & in quo methodum tradiderat ducendi tangentes plurium curvarum, inveniendi centrum gravitatis, quadrandi Helicem Archimedeam, metiendi solida curvarum revolutione circa axem, aut semiordinatam, atque in primis revolutione Logarithmicæ circa asymptotum genita &c. Quibus plane Geometra ingeniosissimus toti Fluxionum methodo propius accesserat, & nisi ipsum mors immatura præripuisset Litterariæ Reipublicæ, alia plura, & maxima inventa pollicebatur.

Iisdem fere temporibus Cavalerius Mediolanensis, quem Galilæus Archimedem alterum appellabat, semina quædam evolvere, atque explicare cæpit, quæ sparsim jecerat Galilæus ipse, potissimum in Dialogo primo, & secundo de Mechanica, & Motu locali. Nimirum magnitudines omnes Geometricas veluti ex infinitis partibus compositas consideravit Cavalerius, & novam indivisibilium theoriam Geometriæ addidit, & ejus ope plurima de Sectionibus Conicis, de spatiis Helicis, & solidis inde genitis prorsus nova, & singularia demonstravit. Illud autem in indivisibilium theoria durius, ac minus Geometricum occurrit quod lineæ ex infinitis punctis, ex infinitis lineis superficies, & solida ex infinitis superficiebus coalescere intelligantur. Quam difficultatem ipse etiam sensit author perspicacissimus, & quæ indivisibilium methodo eruerat, aliis demonstrationibus more veterum confirmavit. In præfatione insuper libri septimi animadvertit eodem modo omnia procedere etiamsi continuum spectetur veluti ex partibus non indivisibilibus coalitum: quo iis aditum aperivit, qui indivisibilibus evanescentia divisibilia substituendo voluerunt lineas componi ex infinitis lineolis, infinite parvis, & in infinitum divisibilibus, ex superficiebus superficies, & rursus ex aliis solidis solida.

Propositionum singularum demonstrationes in hypothesi indivisibilium obscuræ, implexæque sunt, ut sunt principia nascentium omnium facultatum. Torricellius methodum

Ca-

Cavalerii, sive, ut ipse vocat, immensum Cavalerianæ Geometriæ Oceanum ad breviorem, simplicioremque formam revocare caepit in libris de dimensione Parabolae, & Solidi Hyperbolici. Wallisius eamdem methodum calculo aptare studuit in Aritmetica infinitorum, & summationibus serierum infinitarum quadraturas curvarum, & solidorum dimensiones exhibuit. Verum cum inductione usus esset Wallisius, hoc Arithmeticæ genus Bullialdus postmodum more veterum, & maximis ambagibus demonstravit. Barowius eousque progressus est, ut triangulum curvæ, quod vocant characteristicum, considerando, ex differentia duarum semiordinatarum sese proxime consequentium tangentes curvarum ducere docuerit, quemadmodum in lectionibus Geometricis videre est. Attamen Barowii methodus eos tantum casus complectitur, in quibus semiordinata exprimitur potentia aliqua absciſsae exponentis integri, & positivi. Quare eo perducta tunc temporis res erat ut ad differentialem calculum inveniendum unicus fere gradus superesset.

Newtonus in epistola ad Collinium data anno 1672 monuit se methodum Barowii & simpliciorem reddidiſse, & aptaviſse etiam ducendis tangentibus curvarum quarumcumque Geometricarum, Mechanicarumque, & inveniendis areis, longitudinibus, centris gravitatis, quomodocumque demum coordinatarum relatio surdis, & radicalibus quantitatibus exprimeretur. Exempla vero non alia exhibuit quam æquationum a radicalibus omnibus solutarum. Deinde in alia ad Oldemburgium anno 1676 data epistola Newtonus theorema binomii exposuit, & regulas divisionum, ac serierum infinitarum, quarum ope se inveniſse dixit areas, & longitudines curvarum omnium, centrum gravitatis, contenta, & superficies solidorum, & segmentorum quorumcumque. At rursus qua methodo, & ratione eousque pervenerit non aperuit, & exempla dumtaxat, quæ implicite methodum continent, suppeditavit. Cum Oldemburgius epistolam Leibnitio communicaſset, rescripsit statim Leibnitius, & suum differentialem calculum explicavit, quem postmodum publici juris fecit in Actis Lipsiensibus anno 1684. Newtonus anno 1687 edito Principio-

rum

rum Mathematicorum opere suam methodum undique exposuit, & potissimum in *lem.* 2. *lib.* 2. nitide tradidit.

Hæc igitur de inventore differentialis calculi, & methodi fluxionum controversia eo deducta censeri potest, ut, cum Newtono inventionis laus denegari nequeat, Leibnitium simul differentialem calculum invenisse censendum sit, aut potius quadraginta fere annorum studio crevisse paulatim methodum ipsam in Italia primum prognatam, promotamque in Anglia a Wallisio, & Barowio, ac denique a Newtonno, & Leibnitio ad summum apicem perductam. Hi vero diversimode fluxionum, & differentialium theoriam exposuerunt. Leibnitius inprimis cum quantitates non ex indivisibilibus, sed ex divisibilibus evanescentibus consurgere intelligeret, diversos infinite parvorum ordines constituit, & infinite parva consideravit veluti differentias finitarum quantitatum. Deinde cum circa hos ordines infinite parvorum difficultates nescio quas Metaphysicas sentiret, infinite parvis incomparabiliter, sive indefinite parva substituit. Newtonus varios quantitatum ordines agnovit, quarum aliæ præ aliis possent negligi, ut potissimum ex scholio *Propos.* 93. *Lib.* 1., atque ex primo exemplo *Propos.* 10. *Lib.* 2. *Princip. Mathem.* colligitur. Ipso etiam exemplo satis indicavit, se non primas tantum fluxiones, sive prima differentialia, ut perperam nonnulli censent, agnovisse, sed alia insuper omnia inferiorum ordinum. Cum enim curvæ æquationem in infinitam seriem convertisset, monuit primo seriei termino semiordinatam exprimi, secundo determinari positionem tangentis, tertio angulum contactus, seu curvaturam, quarto variationem curvaturæ, quinto variationem variationis, & sic deinceps.

Newtonus autem quantitates Mathematicas non ex partibus quam minimis compositas, sed motu continuo descriptas consideravit, lineas ex. gr. non per appositionem, sed motum continuum punctorum, superficies motu linearum, & motu superficierum solida, angulos rotatione laterum &c: nec quidem summas, aut rationes quantitatum determinatarum, sed summarum, & rationum limites spectavit, quibus scili-

cet quantitates primo naſcuntur, & ultimo evaneſcunt. Hæc ipſe ſingillatim explicavit *ſect.* 1. *Princip.*, quæ de methodo rationum primarum, ultimarumque inſcribitur. Lemma etiam ſecundum *lib.* 2. ſic effertur: ***Momentum genitæ æquatur momentis laterum generantium in eorumdem laterum indices dignitatum, & coefficientia continue ductis.*** Denique opuſculi de methodo Fluxionum, quod anno 1736 Londini editum eſt, duo illa ſunt problemata: ***data relatione quam invicem habent fluentes quantitates, determinare relationem, quæ inter earum fluxiones intercedit: data relatione, quæ contineat quantitatum fluxiones, invenire quam relationem habeant inter ſe hæ quantitates fluentes.*** Ita vir ſagaciſſimus prima Geometrarum veterum principia, quæ Torricellio adeo arriſerant, excoluit, perfecitque.

Totam fluxionum Geometricarum Theoriam Mac-Laurinus integro opere complexus eſt, in quo & magnitudinum geneſim ex motu continuo derivavit, & nulla habita infinite parvorum ratione abſtruſiores magnitudinum proprietates more Mathematicorum veterum inveſtigavit, & Geometrico rigore, atque ordine. Illud in prima parte ſuæ de Fluxionibus tractationis moleſtum videri ſolet, quod ſingularum propoſitionum demonſtrationes longiores ſint: quo fit ut in ipſis perſequendis defatigati nimium Tyrones abſolvendi operis ſtudium in ipſo limine abjiciant. Huic ego incommodo ut occurrerem, ante annos novem diſſertationem quamdam de Methodo Fluxionum Geometricarum Mediolani Tyronum beneficio in lucem edidi, eaque ratione expoſui theoriam continui motus ut & brevitati ſimul, & ſeveritati Geometricæ conſultum eſſet. Idipſum fere eodem tempore in Anglia præſtitit Clariſſimus Simpſonius illuſtri opere ***the doctrine and application of fluxions.*** En modo primam illam diſſertationem ad ampliorem formam redactam, inveniendiſque omnibus Curvarum Algebricarum affectionibus accomodatam.

DEFINITIO PRIMA.

Magnitudines, quæ motu continuo, ut ſupra, gigni, augeri, aut minui intelliguntur, dici ſolent magnitudines fluentes, & dum magnitudinibus quibuſcumque datis augentur, aut imminuuntur, dicuntur fluere. Quare *B O* rectangulum fluens eſt, fluit vero dum lateribus motis ut antea abit in rectangulum *Bo*.

DEFINITIO SECUNDA.

Si magnitudo aliqua æquabiliter fluat, hoc eſt eadem conſtanti ſemper celeritate, celeritas ipſa, qua fluit, dicitur fluxio prima, aut ſimpliciter fluxio propoſitæ magnitudinis. Ex. gr. dum latus *B D* æquabiliter creſcit uſque in *B M*, celeritas, qua creſcit, dicitur lateris ipſius fluxio.

DEFINITIO TERTIA.

Quod ſi velocitas puncti extremi *D* non maneat conſtanter eadem, ſed æquabiliter augeatur, vel imminuatur, æquabilis ipſa celeritas, qua augeri, vel minui intelligitur, dicitur fluxio ſecunda lineæ *BD*. Ex. gr. velocitas puncti *D* exponatur linea *GH*, quae jam aequabiliter creſcat, aut decreſcat puncto extremo *H* æquabiliter moto verſus *N* in priore caſu, & verſus *G* in caſu altero velocitas puncti *H* dicitur fluxio ſecunda lineae fluentis *BD*.

DEFINITIO QUARTA.

Quod ſi creſcens, aut decreſcens velocitas lineæ *BD* non creſcat, aut decreſcat æquabiliter, hoc eſt ipſa etiam velocitas puncti *H* non maneat conſtanter eadem, ſed æquabiliter augeatur, vel imminuatur; conſtans velocitas, qua augetur, vel imminuitur dicitur fluxio ſecunda lineæ *GH*, & fluxio tertia lineæ *BD*. Atque ita porro fluxiones quartæ,

S quin-

quintæ &c dicentur velocitates, quibuſcum creſcent, aut imminuentur æquabiliter fluxiones tertiæ, quartæ &c.

Definitio Quinta.

Si in curva aliqua *F C L*, *fig.* 19., accipiantur binæ ſemiordinatæ *B C*, *M o* infinite inter ſe proximæ, ut ſcilicet differentia omnis *m o* ut infinite parva cenſeri poſſit, & ſemiordinatæ ipſæ veluti inter ſe æquales; vocabitur *m o* differentiale ſemiordinatæ *B C*, *C o* differentiale arcus *F C*, & *B C o M* differentiale areæ *F C B*, quatenus ſcilicet infiniteſimis his quantitatibus binæ ſe ſubſequentes ſemiordinatæ, bini arcus, & binæ areæ differant inter ſe.

L E M M A.

Si magnitudo aliqua inæquabiliter fluat, prima ipſius fluxio pro inſtanti quolibet temporis metiri debet ex ſpatio, quod dato aliquo tempore abſolvi poſſet, ſi eodem inſtanti fluxus in æquabilem converteretur.

Statuamus enim continui motus creſcentem, aut decreſcentem velocitatem dato aliquo inſtanti temporis eſſe *A*. Si fluxus omnis evaderet deinde æquabilis, eademque invariabili velocitate *A* proſequeretur per datum tempus, velocitas eadem *A* foret percurſo ſpatio proportionalis. Itaque etiam ſi fluxus evadat poſtmodum inæquabilis, & velocitate ſucceſſive aucta, vel imminuta majus vel minus ſpatium abſolvatur; velocitas fluxus proportionalis erit ſpatio, quod æquabiliter dato aliquo tempore abſolvi poſſet.

Corollarium Primum.

Si punctum *D* rectæ *B D* æquabiliter fluat, *fig.* 18., æqualibuſque temporibus abſolvat ſemper idem ſpatium *D M*, exponet ipſa *D M* velocitatem puncti *D*, & primam fluxionem rectæ *B D*. Ergo etiam ſi punctum *D* fluat inaequabiliter, fluxio rectae *B D* exponetur ſemper ſpatio *D M*,

quod

quod dato tempore absolvi posset si motus omnis in puncto *D* ad æquabilem reduceretur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Pariter si in rectangulo *BO* latus idem *DO* supra *BDM* fluat, & rectangulum *OM* illud sit quod dato aliquo tempore a recta *DO*, eadem velocitate fluxus, quam in *D* habet, aequabiliter describeretur, erit pro casu quolibet rectangulum ipsum *OM* prima fluxio rectanguli totius *BO*, cujus latus unum *DO* sit constans.

THEOREMA PRIMUM.

Si rectilinea quaevis figura *FCB*, *fig.* 19., fluat, & tangens *AC* ducatur, & sit *Mo* parallella ipsi *BC*, & *Cm* parallella axi *FB*, atque insuper fluxio axis *FB* repraesentetur recta *BM*; dico quod *Cc* erit fluxio arcus *FC*, & *mc* fluxio semiordinatae *BC*.

DEMONSTRATIO.

Fluxio enim arcus, & semiordinatae, quo tempore axis *FB* aequabiliter fluendo augetur spatio *BM*, exhibebitur eo spatio, quo arcus, & semiordinata augeri possent si velocitas puncti *C* eadem immutabiliter permaneret. Patet autem quod punctum *C* motum suum, quem in *C*, habet, æquabiliter continuando, post finem dati ipsius temporis, reperiri debet alicubi in tangente *AC*. Rursus punctum *C* in semiordinata *BC* esse debet, quæ supra axem *FB* fluendo augetur, aut imminuitur. At in fine illius temporis, quo æquabiliter fluendo axis *FB* portione *BM* augetur, semiordinata *BC* in *Mo* transire debet. Tum igitur punctum *C*, continuato æquabiliter motu, quem primo habebat, reperiri debet alicubi in recta *Mo*, & tangente *AC*, sive in communi interfectione *c*: adeoque *Cc* est fluxio arcus *FC*, & *mc* fluxio semiordinatæ *BC*. Q. E. D.

Corollarium Primum.

Si curva versus axem sit concava, tangens AC ultra curvam jacebit, & magnitudo cm, quæ semiordinatæ primam fluxionem exprimet major erit magnitudine mo, qua vere semiordinata ipsa augetur. Celeritas igitur, qua semiordinata in hoc casu fluet, decrescet successive, hoc est semiordinata fluet motu retardato. Si curva ad axem convexa sit, magnitudo, quæ semiordinatæ fluxionem exprimet, ab ea deficiet, qua vere crescet: hoc est semiordinata fluet motu accelerato. Si curva abeat in lineam rectam, & coincidat cum tangente, fluxus erit æquabilis, ut antea notatum est.

Corollarium Secundum.

In primo casu quia celeritas fluxus, seu prima fluxio semper decrescet, necesse erit ut ipsius fluxio, scilicet fluxio secunda semiordinatæ sit negativa. In casu altero positiva erit. Dignoscetur igitur utrum curva aliqua, quæ proponitur, ad axem concava, vel convexa sit, ex quo secunda semiordinatæ fluxio sit negativa, vel positiva.

Corollarium Tertium.

Si fiat $FB=x, BC=y$, & prima abscissæ fluxio BM vocetur de more dx, & dy prima fluxio semiordinatæ, erit $mc=dy$, & $Cc=\surd(dx^2+dy^2)$. Tum etiam si secunda semiordinatæ fluxio vocetur ddy, concava, aut convexa erit curva, prout ddy in æquatione aut negativum, aut positivum valorem obtinebit.

THEOREMA SECUNDUM.

Iisdem positis dico quod areæ totius FCB fluxio metiri debet ex facto semiordinatae BC in fluxionem axis BM, sive ex rectangulo CM.

De-

DEMONSTRATIO.

Per *defin.* 2. fluxio areæ *FCB* eſt continui motus velocitas, qua augeri, aut minui intelligitur. Velocitas per antecedens lemma metiri debet ex ſpatio, quod fuiſſet genitum ſi quo tempore axis *FB* fluit, & motu uniformi augetur ſpatio *BM*, areæ etiam totius fluxus idem continuaretur, qui primo incæpit. Jam vero quo tempore area fluere incipit, ſemiordinata *BC* moveri incipit ſupra *BM*. Fluxio igitur metiri debet ex ſpatio, quod fuiſſet genitum, ſi ſibi æqualis ſemper, & parallella ſemiordinata eadem *BC* motum ſuum ſupra *BM* profecuta eſſet, ſive ex rectangulo *CM*. Q. E. D.

Similis eſt demonſtratio ſi area non fluat, ſed refluat, & rectangulum *CM* fiat negativum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Et quidem cujuſcumque generis ſit curva propoſita, dummodo ſemiordinata *BC* terminetur, & axis dato tempore portione *BM* augeatur, erit ſemper prima areæ fluxio æqualis rectangulo ex *BC* in *BM*, ſcilicet retentis iiſdem denominationibus, quæ ſupra, erit areæ fluxio $= y\,dx$, quæcumque demum ſit coordinatarum y, x relatio.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si duarum magnitudinum ſe conſequentium differentia accipiatur, erunt *Co*, *mo*, & *Co MB* differentialia arcus *FC*, ſemiordinatæ *BC*, & totius areæ *FCB*, nec niſi proxime pro ipſis differentialibus aſſumi poterunt *Cc*, *mc*, & *CM*: quatenus ſcilicet ſi puncta *C*, *c* infinite proxima intelligantur, erit *cm* infinite parva reſpectu *CB*, & *co* infinite parva reſpectu *cm*.

Co-

COROLLARIUM TERTIUM.

Hinc patet methodum Leibnitii, Hospitalii, Wolfii, aliorumque, quam vocant differentialem, & qua magnitudinum propositarum differentiæ eodem modo æstimantur, quo mox fluxiones metiri diximus, approximationis methodum dumtaxat esse. In considerandis autem fluxionibus nullæ sunt quantitates, quæ veluti infinitesimæ alterius ordinis negligantur.

THEOREMA TERTIUM.

Si bina latera CO, DO rectanguli BO fluant, *fig.* 18., & lateris CO, seu BD fluxio sit DM, CN vero sit fluxio alterius lateris; dico quod rectanguli totius fluxio metienda erit rectangulis ex CO in CN, & DO in DM.

DEMONSTRATIO.

Compleatur rectangulum $B\,M\,o\,N$, & per puncta O, o ducatur recta, quæ latus BD secet in P. Dividetur rectangulum omne in triangulum POD, & trapetium $BPOC$. Abibit autem rectangulum $B\,O$ in $B\,O$, quod triangulum POD in PoM abeat, & trapetium $B\,P\,O\,C$ in $B\,P\,o\,N$. Itaque rectanguli totius fluxio æquabitur duabus simul fluxionibus trianguli, & trapetii, sive per *Coroll.* 1. *Theor.* 2. duobus rectangulis ex DO in DM, & CO in CN. Si fiat $DO = u$, $CO = v$, $DM = dv$, $CN = du$, erit rectanguli, seu producti vu fluxio $= vdu + udv$. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quoniam igitur producti fluxio æquatur fluxioni lateris uniuscujusque in latus alterum ductae, vicissim si productum vocetur z, ut sit $v = \frac{z}{u}$, fiet $u\,dv + v\,du = dz$, & inde erue-

eruetur $dv = \frac{dz - udv}{u} = \frac{udz - zdu}{u^2}$: scilicet fracti cujuscumque $\frac{z}{u}$, aut v fluxio æqualis erit differentiæ factorum ex fluxionibus numeratoris in denominatorem, & denominatoris in numeratorem per denominatoris ipsius quadratum divisorum.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si manente triangulo *POD* latus *Mm* rectanguli *MO* portione *mo* aequabiliter augeatur, & latus *Om* perpendiculariter moveatur supra *mo*, hoc est si ipsum etiam rectangulum *MO* fluat; ipsius fluxio erit rectangulum Omon, per *Coroll.* 1. *Theor.* 2. Itaque Omon fluxionem fluxionis exprimet, sive secundam fluxionem trianguli *P O D*. Exprimet etiam fluxionem secundam trapetii *B P O C*, & tota secunda fluxio rectanguli *BO* erit $= 2\,du.dv$.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si bina rectanguli latera æquentur inter se, & laterum fluxiones pariter sint aequales, aequalia fient rectangula *O M*, *O N*, & quadrati totius prima fluxio metietur duplo rectangulo *O M*, sive erit $= 2\,v\,dv$, secunda vero $= 2\,dv^2$. In accipienda igitur prima fluxione utrobique omittitur Omon, non quod sit quantitas infinite parva respectu *O M*, quemadmodum juxta principia differentialis calculi statuendum esset, sed quod ad secundam fluxionem ipsius *B O* pertineat.

THEOREMA QUARTUM.

Si parallellepipedi *MC*, *fig.* 20., latus unum *M N*, aut duo *M N*, *D N*, aut tria simul *M N*, *D N*, *N Q* fluant aequabiliter, augeanturque singula rectis *NP*, *NH*, *Q R*; fluxio totius parallellepipedi metietur in primo casu parallellepipedo ex *D Q* in *N P*, in secundo autem duobus ex *D Q*

in

in NP, & MQ in NH, in tertio demum tribus ex DQ in NP ex MQ in NH, & BQ in QR.

Demonstratio.

Quippe si ex una dumtaxat parte fluat parallelepipedum, primo planum DQ moveri incipiet supra NP: quo dato ex principiis superioribus sequitur parallelepipedi totius fluxionem metiendam esse ex eo, quod gigneretur si planum idem DQ motum suum supra NP aequabiliter continuaret ut primo incaepit, sive ex parallelepipedo baseos DQ, & altitudinis NP. Eodem modo ostendentur aliae propositionis partes. Possent etiam derivari omnia ex tertio Theoremate. Sint tria parallelepipedi latera v, u, t, & respectivae laterum fluxiones dv, du, dt. Fiat $vu = z$, & totum parallelepipedum $= zt$. Erit juxta ipsam propositionem fluentis zt fluxio $= zdt + tdz = vudt + tdz$. Jam vero, ob $z = vu$, erit etiam $dz = vdu + udv$. Erit itaque parallelepipedi totius fluxio $= vudt + tvdu + tudv$. Q. E. D.

Corollarium Primum.

Eadem ratione si proponatur magnitudo aliqua $avuts$, ex facto constantis a, & laterum fluentium v, u, t, s genita, & fiat $vu = z$, per hanc ipsam propositionem evadet fluxio $= aztds + azsdt + atsdz = avutds + avusdt + avtsdu + autsdv$. Et si lateribus u, & s continuo motu crescentibus, alia v, & t decrescant, horum fluxiones fient negativae $-dv$, $-dt$, & tota magnitudinis prioris fluxio erit $avutds - azsdt + avtsdu - autsdv$. Generatim magnitudinis compositae cujuscumque fluxio erit factum ex respectivis laterum singulorum fluxionibus in productum aliorum laterum, & coefficientes omnes multiplicatis.

Co-

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si latera omnia parallellepipedi aequentur inter ſe, & ex parallellepipedo fiat cubus, erit fluxio $= 3\ v^2\ d\ v$. Erit etiam magnitudinis $a\,v^4$ fluxio $= 4\,a\,v^3\,dv$, & generatim magnitudinis $a\,v^m$ fluxio $= m\,a\,v^{m-1}\,dv$. Pariter cum magnitudinis $a\,x + x^2$ fluxio eſſe debeat $= a\,dx + 2\,x\,dx$, erit fluxio magnitudinis $(a\,x + x^2).(a\,x + x^2)$, sive $(a\,x + x^2)^2 = 2.(a\,x + x^2).(a\,dx + 2\,x\,dx)$. Fluxio etiam magnitudinis $(a\,x + x^2)^3$ erit $= 3.(a\,x + x^2)^2.(a\,dx + 2\,x\,dx)$, & generatim magnitudinis $(a\,x + x^2)^m$ fluxio erit $= m(a\,x + x^2)^{m-1}.(a\,dx + 2\,x dx)$. Generatim igitur fluxio quantitatis cujuſcumque simplicis, aut compositae, ad poteſtatem quamlibet elevatae, aequabitur facto exponentis, coefficientium, fluxionis lateris, & lateris ipsius ad poteſtatem unitate minorem elevati.

COROLLARIUM TERTIUM.

Idem erit theorema si exponens poteſtatis non integer ſed fractus sit. Proponatur ex. gr. quantitas $(a\,x + x^2)^{\frac{3}{2}}$, quae fiat $= Z$, ut sit $(a\,x + x^2)^3 = Z^2$. Quia aequalium fluentium aequales etiam fluxiones eſſe debent, erit $3.(a\,x + x^2)^2$ $(a\,dx + 2\,x\,dx) = 2\,Z\,dZ$: unde aequationem per $2\ Z$, sive per $2\,(a\,x + x^2)^{\frac{3}{2}}$ dividendo, fiet quaesita fluxio $dZ = \frac{3}{2}$ $(a\,x + x^2)^{\frac{1}{2}}.(a\,dx + 2\,x\,dx)$. Pariter quantitatis $(x\,y + y^2)^{\frac{2}{3}}$ fluxio erit $= \frac{2}{3}(x\,y + y^2)^{-\frac{1}{3}}.(x\,dy + y\,dx + 2\,y\,dy)$, & generatim quantitatis $(a\,x + y^2)^{\frac{m}{n}}$ fluxio erit $= \frac{m}{n}(a\,x + y^2)^{\frac{m-n}{n}}$ $(a\,dx + 2\,y\,dy)$.

Corollarium Quartum.

Perinde erit etiam ſi exponens poteſtatis ſit negativus. Proponatur ex. gr. quantitas $a x^{-m}$, quæ fiat $= X$, ut prodeat $a = x^m X$. Quia conſtantium quantitatum fluxio nulla eſt, ſumptis fluxionibus prodibit $m x^{m-1} X dx + x^m dX = 0$, & inde eruetur $dX = -m a x^{-m-1} dx$. Generatim quantitatis $(ay + x^2)^{-m}$ fluxio erit $= -m \cdot (ay+x^2)^{-m-1} (ady + 2xdx)$ $= -\frac{m(ady + 2xdx)}{(ay + x^2)^{m+1}}$. Ita generale erit Corollarii ſecundi theorema.

Corollarium Quintum.

Hoc etiam poſito cum fracti $\frac{1}{(a+x)^m}$ fluxio ſit $= \frac{-mdx}{(a+x)^{m+1}}$, & per *Coroll.* 1. *Theor.* 3. fracti cujuſcumque $\frac{z}{u}$ fluxio ſit $= \frac{udz - zdu}{u^2}$, erit fluxio compoſitæ fractionis $\frac{cz}{(a+x)^m} = \frac{(a+x)^m c dz - mcz \cdot (a+x)^{m-1} dx}{(a+x)^{2m}}$. Quare generatim perſpicitur quomodo facti, potentiæ, & quoti cujuſcumque fluxio ſumenda ſit.

Corollarium Sextum.

Et qua lege invenitur fluxio propoſitæ fluentis cujuſcumque, eadem etiam inveniri poterit ſecunda fluxio, ſi prima conſideretur veluti fluens, & fluxio tertia, ſi ſecunda pariter fluat &c. Sit enim ddx ſecunda fluxio quantitatis incomplexæ x. Erit quantitatis complexæ $(a-x)^{\frac{3}{2}}$ prima fluxio $= -\frac{3}{2}(a-x)^{\frac{1}{3}} dx$, & ſecunda $= \frac{3}{4}(a-x)^{-\frac{1}{2}} dx^2 - \frac{3}{2}$

(a

$(a-x)^{\frac{1}{2}} ddx$. Pariter quantitatis $a x^2 y^3$ fluxio secunda erit $= 2 a y^3 dx^2 + 2 a x y^3 ddx + 12 a x y^2 dx dy + 3 a x^2 y^2 ddy + 6 a x^2 y dy^2$. Ita etiam eruentur fluxiones tertiae, & aliae omnes in infinitum.

COROLLARIUM SEPTIMUM.

Si incomplexae quantitatis x, aut y secunda fluxio nulla sit, hoc est si x, aut y fluat æquabiliter, in accipiendis secundis fluxionibus quantitatum complexarum nihilo æquandi erunt termini, in quibus occurret ddx, aut ddy. Ita si sit $ddx = o$, erit $\frac{3}{4}(a-x)^{-\frac{1}{2}} dx^2$ secunda fluxio quantitatis $(a-x)^{\frac{3}{2}}$

THEOREMA QUINTUM.

Si Hyperbola *MGF* ad asymptotos *AN*, *AD* referatur, *fig.* 21., & sit latus potentiæ hyperbolæ $AB = AE$, erunt primo areæ *BF*, *BR* abscissarum *AC*, *AT* logarithmi, & fluxio areæ cujuscumque æquabitur fluxioni illius abscissæ, cujus est logarithmus, ductæ in latus potentiæ hyperbolæ, & per abscissam ipsam divisæ.

DEMONSTRATIO.

Fingantur duæ semiordinatæ *CF*, *TR* ea lege supra asymptotum *AN* fluere, ut abscissa unius sit semper potestas eadem n abscissæ alterius, & fiat $AB = a$, $BC = x$, $AC = a + x$, adeoque $AT = (a+x)^n$. Erit $CF = y = \frac{a}{a+x}$, $RT = \frac{a}{(a+x)^n}$, & per *Coroll.* 1. *Theor.* 2. erit fluxio areæ $BF = y\,dx = \frac{a\,dx}{a+x}$, & fluxio areæ $BR = \frac{a}{(a+x)^n} . n(a+x)^{n-1} dx$

 $= na$

$= \frac{nadx}{a+x}$. Velocitates igitur, quibus femiordinatæ in locis fingulis fluent, & areæ totæ BF, BR velocitatibus iifdem genitæ proportionales erunt exponentibus, 1, n abfciffarum AC, AT. Sunt autem logarithmi ut exponentes poteftatum, quarum funt logarithmi. Erunt igitur areæ abfciffarum logarithmi, & areæ cujufcumque fluxio erit fluxio ipfa abfciffæ, cujus eft logarithmus, ducta in latus potentiæ hyperbolæ, & per abfciffam eamdem divifa. Q. E. D.

Corollarium Primum.

Si producatur CF in H ut fit HC æqualis areæ hyperbolicæ BF per latus AB divifæ, & ducatur HL parallella afymptoto AN, puncta omnia H defignabunt Logarithmicam BQ, in qua abfciffæ LA erunt logarithmi femiordinatarum LH, five in qua abfciffis æquabiliter crefcentibus, femiordinatæ crefcent proportionaliter. Pariter erit Ap logarithmus femiordinatæ Q, five $AB - BT$, vel areæ hyperbolicæ $ADMT$ per AB divifæ: quæ, quoniam jacet ex parte oppofita prioris areæ, negativa erit, & BA accepta pro unitate, femiordinatis Logarithmicae unitate minoribus refpondebit.

Corollarium Secundum.

Quia hyperbolae MGF oppofita mgf refpondet, fi hujus area eodem modo inquiratur, defcribetur alter logarithmicae ramus hbq eodem axe Lp praeditus, iifdemque abfciffis AL, Ap, & femiordinatis negativis Lh, pq. Erit enim $Ab = -a$, $bc = -x$, $Ac = -a - x$, $cf = -y = \frac{a}{-a-x}$: quae quantitas ducta in fluxionem abfciffae $-dx$, dabit fluxionem areæ $\frac{adx}{a+x}$ prorfus ut antea. Haec attigiffe obiter fufficiat, ut pateat, quod primo Bernoullius afferuerat, duos effe ramos Logarithmicæ. Qui circa quantitates eidem Logarithmo

re-

respondentes plura desideret, adeat imprimis Cl. Walmesley opusculum, quod Actis Berolinensibus anno 1755 insertum est.

COROLLARIUM TERTIUM.

Si fiat $a+x=z$, adeoque $dx=dz$, erit fluxio logarithmi quantitatis $z = \frac{adz}{z}$: æqualis scilicet fluxioni dz per z divisæ, & ductæ in latus potentiæ hyperbolæ, quod etiam modulus logarithmorum dicitur. Si z minor sit quam a, & fiat $= a-x$, fluxionem logarithmi habebit $= -\frac{adz}{z}$: idem scilicet erit theorema, & dumtaxat abscissae Ap negative accipiendae erunt. Si logarithmorum modulus sit $=1$, erit logarithmi fluxio in primo casu $\frac{dz}{z}$, & $-\frac{dz}{z}$ in casu altero.

COROLLARIUM QUARTUM.

Hoc etiam posito inveniri poterit fluxio logarithmi, qui respondeat quantitati cuicumque compositæ x^2+b^2. Nam si logarithmorum modulus sit a, erit, per *Coroll.* 3. *Theor.* 3., $\frac{adz}{z} = \frac{2axdx}{x^2+b^2}$. Erit pariter $\frac{abdx+2axdx}{bx+x^2}$ fluxio logarithmi quantitatis $bx+x^2$, & $\frac{2a^2dz}{a^2-z^2}$ erit fluxio logarithmi quantitati $\frac{a+z}{a-z}$: quod idem valet de cæteris.

COROLLARIUM QUINTUM.

Quod si proponatur quaepiam variabilis z ad potestatem x elevata, sive, ut vocat Johannes Bernoullius, percurrens aliqua, & exponentialis quantitas, & fiat $z^x=t$, ut juxta logarithmorum regulas evadat $x.log.z=log.t$; datis logarithmorum fluxionibus dabitur etiam propositae quantita-

tis

tis fluxio. Nam si logarithmorum modulus sit $= 1$, erit $\frac{x\,dz}{z} + log.\, z\,.\,dx = \frac{dt}{t}$, adeoque $dt = \frac{x\,t\,dz}{z} + t\,.\,log.\,z\,.\,dx = x\,z^{x-1}\,dz + z^{x}\,.\,log.\,z\,.\,dx$. Erit etiam $a^{x}\,dx\,.\,log.\,a$ fluxio quantitatis exponentialis a^{x}.

THEOREMA SEXTUM.

Si aequationis alicujus utcumque ex variabilibus, & constantibus quantitatibus conflatae accipiatur fluxio, multiplicantur singuli aequationis termini per seriem Arithmeticam.

DEMONSTRATIO.

In primis si æquatio aliqua $x^3 + a\,x^2 + b^2\,x + c^3 = 0$ unam variabilem complectatur, per superiores regulas evadet fluxio $= 3\,x^2\,dx + 2\,a\,x\,dx + b^2\,dx = x^3\,.\,\frac{3\,dx}{x} + ax^2\,.\,\frac{2\,dx}{x} + b^2\,x\,.\,\frac{dx}{x} + c^3\,.\,0$. Idem bis fieri debet si binæ in æquatione adsint variabiles, & secundum utriusque exponens bis æquatio ordinetur. Ita æquationis $a\,x^3 + b\,x^2 y + c\,x\,y^2 + m\,y^3$ fluxio evadet $= a\,x^3\,.\,\frac{3\,dx}{x} + b\,x^2\,y\,.\,\frac{2\,dx}{x} + c\,x\,y^2\,.\,\frac{dx}{x} + m\,y^3\,.\,0 + m\,y^3\,.\,\frac{3\,dy}{y} + c\,x\,y^2\,.\,\frac{2\,dy}{y} + b\,x^2\,y\,.\,\frac{dy}{y} + a\,x^3\,.\,0 = 3\,a\,x^2\,dx + 2\,b\,x\,y\,dx + c\,y^2\,dx + 3\,m\,y^2\,dy + 2\,c\,x\,y\,dy + b\,x^2\,dy$. Valet idipsum de aliis quibuscumque æquationibus, sive termini aliqui deficiant, sive non. Q. E. D.

COROLLARIUM PRIMUM.

Quia juxta notum Huddii theorema, cujus demonstrationem primo exhibuit Saurinus, si æquatio æqualium radicum quarumcumque per seriem Arithmeticam multiplicetur in æquationem aliam abibit, quæ unam minus radicum aequa-

qualium continebit, & quæ adhuc unam minus continebit æqualium radicum si multiplicetur rursus per aliam seriem Arithmeticam, atque ita porro quousque radices omnes æquales multiplicationibus hujusmodi sublatæ sint, tunc enim termini, qui ex multiplicatione ultima emergent, non erunt amplius nihilo æquales; patet idipsum quoque obtineri si prima, secunda &c æquationis fluxio accipiatur.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si x, & y in æquatione binos valores habeant inter se æquales, & utrisque indeterminatis habitis pro fluentibus accipiatur prima fluxio æquationis; quæ emerget quantitas unam minus radicum æqualium continebit, & erit simul nihilo æqualis. At si secunda accipiatur fluxio, prodeuntes termini nullam amplius complectentur ex radicibus ipsis æqualibus, nec simul omnes se destruent. Pariter si tres habeantur in æquatione aliqua indeterminatarum valores inter se æquales tribus fluxionibus acceptis radices omnes æquales eliminari ex æquatione poterunt, & qui emergent termini non amplius poterunt nihilo simul exæquari.

COROLLARIUM TERTIUM.

Quod si x quidem in æquatione plures obtineat valores inter se æquales, y vero non nisi unicum eumdem valorem habeat, & x dumtaxat pro fluente accipiatur; sumptis duabus, tribus &c fluxionibus æquationis tollentur duæ, tres &c ex iis radicibus æqualibus: omnibus autem radicibus eliminatis, qui supererunt termini non amplius simul destruentur. Idipsum fiet si x unicum, & plures y valores habeat inter se æquales, atque ita accipiatur æquationis totius fluxio, ut dumtaxat y pro fluente, & x pro constante quantitate consideretur.

SCHO-

SCHOLION.

Inde etiam totius calculi fluentium elementa facili ratione Tyro comparare sibi ipsi poterit. Patent enim conversæ omnes propositiones. Et primo quidem ex *Theor.* 3., & 4. manifestum est quantitatis $v\,du + u\,dv$ fluentem esse rectangulum $v\,u$, & quantitatis $vu\,dt + tu\,dv + tv\,du$ fluentem esse parallelepipedum $v\,u\,t$: quo modo corollarium primum utriusque Theorematis pariter converti potest. Deinde ex *Coroll.* 2. 3. & 4. *Theor.* 4. consequitur facti cujuslibet ex fluxione lateris, & potestate lateris aliqua fluentem esse latus ipsum propositum ad potestatem exponentis unitate aucti elevatum, ductumque in coefficientes omnes, & novo ipso exponente postea divisum: scilicet fluxionum $x^{\frac{m}{n}}\,dx$, $\frac{m}{n}(ax+y^2)^{\frac{m-n}{n}}(a\,dx+2y\,dy)$, $-max^{-m-1}\,dx$ fluentes erunt $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$, $(ax+y^2)^{\frac{m}{n}}$, $\frac{a}{x^m}$. Denique ex *Theor.* 5. præsto est, quod si aliqua habeatur fractio, cujus numerator sit fluxio denominatoris in quantitatem constantem ducta, fractionis fluens erit logarithmus denominatoris per quantitatem ipsam constantem multiplicatus, & per logarithmorum modulum divisus. Ita posito modulo $= 1$, quantitatis $\frac{2x\,dx}{a^2+x^2}$ fluens erit $log.\,(a^2+x^2)$, & quantitatis $\frac{x\,dx}{a^2+x^2}$ fluens $\frac{1}{2}\,log.\,(a^2+x^2) = log.\,\sqrt{(a^2+x^2)}$.

Illud dumtaxat observare debent Tyrones quod cum magnitudinum constantium fluxio nulla sit, & non minus magnitudinis x^m quam $x^m \pm a^m$ fluxio sit $mx^{m-1}\,dx$, vicissim fluxiones $m\,x^{m-1}\,dx$ fluens esse poterit non minus x^m quam $x^m \pm a^m$. Universim igitur fluenti inventæ adjicienda erit quantitas quæpiam constans C, ut ex. gr. fluxionis $2x\,dx\,\sqrt{(a^2+x^2)}$ fluens completa sit $\frac{2}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$. Valor

con-

conſtantis quantitatis ex peculiaribus Problematum conditionibus determinari poterit. Ut ſi fluxionis propoſitæ fluens nulla eſſe debeat poſito $x = o$, erit $\frac{2}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}a^3 + C = o$, & inde eruetur $C = -\frac{2}{3}a^3$, & erit completa fluens $= \frac{2}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a^3$. Contra quia quantitatis $\frac{3}{2}(ax + x^2)^{\frac{1}{2}}(adx + 2xdx)$ fluens tota $(ax + x^2)^{\frac{3}{2}}$ fit $= o$ ubi eſt $x = o$, nulla ipſi quantitas conſtans addenda erit.

Patet autem infinitos caſus haberi poſſe, qui prioribus tribus fluxionum claſſibus non complectantur. Et quidem ſæpe æquationes ad claſſes ipſas ſubſtitutione aliqua reduci poſſunt. Accidit id primo ubi variabilis ſub ſigno radicali poſita unius dimenſionis eſt, & quæ extra ſignum reperitur poteſtas ipſius variabilis ſit exponentis poſitivi. Si enim proponatur $xdx\sqrt{(a+x)}$, & fiat $a + x = z$; erit $xdx\sqrt{(a+x)} = z^{\frac{3}{2}}dz - az^{\frac{1}{2}}dz$: cujus fluens juxta ſuperiores regulas prodit $= \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}az^{\frac{3}{2}}$. Deinde ubi variabilis ſub ſigno radicali ſecundam dimenſionem non ſuperet. Ita ſi proponatur fluxio $\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}}$, & fiat $\sqrt{(ax+x^2)} = \frac{zx}{b}$, adeoque $x = \frac{ab^2}{z^2 - b^2}$, $\sqrt{(ax+x^2)} = \frac{abz}{z^2 - b^2}$ $dx = \frac{-2ab^2zdz}{(z^2-b^2)^2}$, prodibit $\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = -\frac{2adz}{b}$. Iiſdem ſemper ſubſtitutionibus fluxionum reductio habebitur ſi occurrat quantitas radicalis $\sqrt{(ax - x^2)}$, aut $\sqrt{(x^2 - ax)}$. Si occurrat radicalis quantias $\sqrt{(x^2 \pm a^2)}$ poni debet ipſa $= x \pm z$, & ſi occurrat $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ fieri debet $= a - \frac{xz}{b}$.

Perinde eſt etiam ſi exponens quantitatis fluentis extra ſignum unitate auctum evadat multiplum aliquod indicis ſub ſigno poſiti. Ut ſi ſit formula $(a + cz^n)^m bz^{rn-1}dz$, & ponatur $a + cz^n = x$, ſubſtitutioneſque omnes fiant, propoſita

formula in hanc aliam convertetur $\frac{bx^m dx}{nc^r}(x-a)^{r-1}$. Tum elevando $x-a$ ad poteſtatem exponentis $r-1$, prodibit ſeries, quæ ſi r ſit numerus integer, ſemper finita erit, & cujus termini omnes in $\frac{bx^m dx}{nc^r}$ ducti fluxiones totidem ſuppeditabunt, quæ ſuperioribus regulis ad fluentes reduci poterunt. Sæpe ſæpius autem fluentium inventio altioris indaginis eſſe ſolet. Difficiliores caſus, præcipuos ſaltem exponere ad præſens inſtitutum noſtrum non pertinet. Qui plura hacce in re deſiderat Tyro, adeat eximium opus Cl. Bougainvillii, in quo ſummorum Geometrarum, & potiſſimum Alembertii, atque Euleri noviſſima inventa ſingulari nitore, atque ordine complexus eſt.

DE

DE CURVARUM AFFECTIONIBUS.

PARS ALTERA.

PUnctum singulare vocari solet quod singularitate a reliquis curvæ punctis secernitur. Et primo quidem punctum aut simplex est, aut multiplex: simplex quod ad unum tantum curvæ ramum refertur, multiplex quod simul pluribus commune est: & singillatim duplex dicitur quod duobus, triplex quod tribus commune est, sive duplex per quod curva bis transit, triplex per quod transit ter &c. Punctum duplex triplici modo haberi poterit: aut quod duo rami *NF*, *EH* se ipsos secent, & nodum aliquem referant in *G*, *fig.* 22. aut quod ovalis *B b* ad curvam *AH* pertineat, *fig.* 23., cujus magnitudo cum ex constantibus quantitatibus æquationem curvæ afficientibus pendeat, mutatis successive constantibus, successive & per gradus singulos imminui poterit ovalis, quousque puncta *B*, *b* sibi accedentia demum congruant, & ovalis jam evanescens abeat in punctum curvæ *AH* conjugatum, quod erit duplex: aut denique quod duo curvæ rami se ipsos tangant in eodem puncto, quod rursus triplici ratione obtineri poterit, aut quod duo rami concavitatem ad oppositas partes obvertant, quo in casu dicuntur se osculari, aut quod obvertant ad easdem partes, & se am-

complectantur, aut quod ramus alteruter in ipso puncto osculi inflectatur, & cum primo convexitatem rami alterius convexitati obvertisset, obvertat postmodum concavitatem, quod punctum dicitur osculo — amplexus. Punctum triplex habebitur si aut punctum duplex conjugatum alicubi in curvæ perimetro sit positum, aut curva rursus per punctum osculi, amplexus vel nodi transeat. Puncta singula distinguentur a se invicem quo modo puncta duplicia distingui diximus. Id etiam pro punctis aliis multiplicibus quibuscumque valere debet.

Hoc ipso patet puncta multiplicia esse etiam singularia: Simplicia autem puncta singularia quoque esse possunt si sint puncta inflexionis, aut puncta regressus alicujus, aut puncta serpentina. Inflecti dicitur curva ubi ex concava fit convexa, aut ex convexa fit concava. Regredi autem a loco dato, ad quem antea accedebat curva, duplici modo potest: aut ex eadem parte concavitatem objiciendo prioris rami convexitati, & cuspidem quasi efformando: aut ex parte altera prioris rami convexitati ipsius obvertendo convexitatem. Duos hosce casus jam olim distinxerat Hospitalius. Cl. Agnesia *lib.* 2. *Instit. Analyt. num.* 132. cuspidem describi docuit evolutione alterius curvæ, quæ alicubi inflexionem aliquam subeat. Cuspidem tamen impossibilem censuit Cl. De Gua de Malves. Ipsius demonstrationem eo vitio laborare Cramerus animadvertit, quod de tota infinita serie ex primo tantum seriei termino judicium tulerit. Sane si curvam MOm, *fig.* 24., ponamus definiri æquatione $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$, inveniemus regressum primi generis, seu cuspidem in puncto O. Posita enim $PO = x$, eidem abscissæ positivæ x duæ respondebunt positivæ semiordinatæ, $Pn = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$, & $PN = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$. Abscissis autem evadentibus negativis, ob radicalem terminum $\sqrt{ax}$, semiordinatæ omnes evadent imaginariæ. Vide Cl. Alembertium in Actis Berolinensis Scientiarum Academiæ anno 1746.

At

At poteſt etiam curva $ABCDE$, *fig.* 25., ſinuoſitates quaſdam habere, & ſimplices inflexiones ABC, &c, in quibus ex concava fiat convexa, & rurſus concava. Quia vero ſinuoſitatum omnium magnitudo, & protenſio pro conſtantium quantitatum æquationem curvæ afficientium diverſa magnitudine diverſa eſt; patet quod ſi ſtatuamus ſinuoſitatem primam BC eouſque minui ut ad oculum evaneſcat, punctis B, C indiſcernibili tantum ſpatio a ſe invicem diſtantibus, per indiſcernibile ſpatium curva ex concava fiet convexa, & rurſus concava, inflexionemque quam vocant ſecundi generis, & inviſibilem ſubibit: & ſi rurſus alia ſinuoſitas CD ita minuatur, ut evaneſcat, puncto D ipſi B ad diſtantiam inaſſignabilem propius admoto, curva in loco B per ſpatium inaſſignabile ex concava fiet convexa, & rurſus concava, & inde convexa, inflexionemque ſubibit tertii generis, quæ inflexio erit viſibilis concavo arcu AB ad ſenſum cum arcu convexo DE conjuncto. Quod ſi poſtmodum ſinuoſitates aliæ minuantur ut evaneſcant, inflexiones orientur quarti, quinti generis &c alternatim viſibiles, & inviſibiles. Maupertuiſius hæc puncta vocavit ſerpentina in Actis Pariſienſis Academiæ anno 1729, ubi primum ipſorum ideam exhibuit.

Ex hac punctorum ſingularium idea primo conſequitur puncto multiplici abſciſſas plures, & plures ſemiordinatas inter ſe æquales reſpondere, puncto duplici duas, tres puncto triplici &c. Ubi enim curva nodum aliquem viſibilem, aut inviſibilem habeat in G, *fig.* 22., patet quod ducta tangente MH, demiſſiſque ex F, E, H ſemiordinatis FB, ED, HL, duæ hujuſmodi ſemiordinatæ FB, ED, & duæ abſciſſæ pariter AB, AD interſe invicem æquari debent, accedentibus ad ſe punctis F, E, & in puncto duplici G coaleſcentibus. Ita univerſim puncto multiplici tot abſciſſæ, & ſemiordinatæ æquales reſpondebunt, quotuplex erit gradus multiplicitatis puncti. At ſi de punctis ſingularibus, & non multiplicibus ſit ſermo, recta dumtaxat, quæ curvam tanget in puncto inflexionis viſibilis, aut inviſibilis cenſebitur curvæ ipſi occurrere in tot punctis quotuplex eſt gradus inflexionis,

nis, & insuper duobus aliis. Curva enim quævis, *ABD*, *fig.* 26., ad minus in duobus punctis a recta linea *GE* secari potest. Statuamus ita moveri hanc rectam, ut demum evadat tangens in puncto *B*. Subtensa *BD* minuetur per gradus singulos, & evanescente subtensa tangens *ge* adhuc in duobus punctis censebitur curvæ occurrere. Si curva *LNP*, *fig.* 27., inflexionem aliquam subeat, in tribus punctis secabitur a recta *RQ*, quæ successive mota, ut interceptæ *MN*, *NO* evanescant, evadet tangens *TH*, & in tribus adhuc punctis sibi proximis curvæ occurret. Si inflexio secundi generis habeatur in puncto *N*, curva in quatuor punctis a linea recta secari poterit, in quinque si inflexio sit tertii generis &c, hoc est tangens in priore casu quater occurret curvæ, quinquies in casu altero &c.

Hoc ergo multiplicia puncta inter, & multiplicis inflexionis discrimen erit, quod multiplicia cum vere ad plures, diversosque ramos curvæ pertineant eodem tempore, quævis recta per puncta ipsa transiens toties ad minus occurrit curvæ quot sunt unitates in indice multiplicitatis puncti. At si punctum inflexionis alicujus multiplicis proponatur, non recta quævis, sed tangens tantum censetur in tot curvæ punctis occurrere, quot sunt unitates in indice multiplicitatis punctis & duobus insuper. Quod si punctum sit simul multiplex, & multiplicis inflexionis, recta, quæ ipsum tanget, in tot curvæ punctis censebitur occurrere quot sunt unitates in indice multiplicitatis puncti, & multiplicitatis inflexionis una addita: aut si ea sit semiordinatæ ad axem inclinatio, ut alicubi evadat tangens puncti alicujus hujusmodi, in totidem punctis ibidem censebitur curvæ occurrere semiordinata, in tribus scilicet si punctum tantummodo duplex sit, in quatuor si punctum duplex inflexionem primi generis subeat, in quinque si inflexio puncti duplicis secundi generis sit, & universim in tot punctis uno amplius, quot sunt unitates in indice multiplicitatum puncti, & inflexionis.

Positis hisce principiis Cl. de Bragelogne in Actis Parisiensis Academiæ anno 1730, & 1731. puncta multiplicia, & singularia curvarum ope calculi differentialis investigavit.

Ipsius

Ipſius methodum pluribus de cauſſis reprehendit De Gua de Malves in opere eximio, quo Carteſianam Analyſim ſic promovit, ut punctis ſingularibus non ſolum, verum etiam aſymptotis, & maximis, ac minimis ordinatis, cæteriſque omnibus curvarum proprietatibus inveniendis aptaverit: quod Eulerus quoque in Introductione ad Analyſim infinitorum, & Cramerus in Introductione ad curvarum Analyſim egregie præſtiterunt. Et quidem aſymptotos curvarum facilius Algebra Carteſiana determinari, quam calculo differentiali, & methodo fluxionum inficiari minime poteſt. Neque enim aliud requirit hæc omnis inveſtigatio, quam ut propoſita alicujus curvæ æquatione videatur utrum infinitæ abſciſſæ ſemiordinata infinita reſpondeat, aut finita, aut infinite parva. Ita ſi æquatio ſit $y^m = a x^n$, & exponentes m & n poſitivi ſint, infinitæ abſciſſæ reſpondebit ſemiordinata infinita, & curva ad genus Parabolicum referetur. Si vero m quidem poſitivus, & n negativus ſit, abſciſſæ infinitæ x reſpondebit ſemiordinata y infinite parva, & curva erit generis Hyperbolici, & ad infinitum ſemper accedet axi quin axem ſecet, axiſque idem propterea erit curvæ propoſitæ aſymptotus. Theoriam omnem ramorum ad infinitum excurrentium diverſi authores diverſa methodo explicarunt.

Cramerus *cap.* 8. Introductionis maximos, minimoſque æquationis terminos ope Newtoniani parallellogrammi excerpendos eſſe docuit, tum extractis radicibus ramorum infinitorum numerum, & poſitionem determinavit. Ut ſi proponatur curva æquationis $y^4 + 2 x^2 y^2 + x^4 - 6 a x y^2 - 2 a x^3 + a^2 x^2 = 0$, ejuſdem parallellogrammi regula eruetur $y^4 + 2 x^2 y^2 + x^4 = 0$, & extracta radice $y^2 + x^2 = 0$, cujus æquationis radices aliæ ſunt $y + x \sqrt{-1} = 0$, $y - x \sqrt{-1} = 0$, ſcilicet imaginariæ: quod indicat neque abſciſſas, neque ſemiordinatas curvæ propoſitæ infinitas unquam evadere, neque ullos eſſe ramos ad infinitum uſque excurrentes. Contra ſi proponatur æquatio $x y^2 - a^2 y - b^3 = 0$, primo ſtatui poterit $x y^2 - a^2 y = 0$, unde eruetur $x = \frac{a^2}{y}$, & bini emergent rami infiniti coordinatis poſitive, & negative ſumptis reſponden-

dentes, & prædití asymptoto semiordinatis parallella. Quod si fiat $xy^2 - b^3 = o$, eruetur $\pm y = \pm \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{x}}$, & duo alii prodibunt rami infiniti, quorum asymptotus erit ipse axis abscissarum. Eulerus *lib.* 2. Introductionis *cap.* 7. simili methodo usus est, investigando factores omnes reales supremi æquationis membri, in quo binæ indeterminatæ eamdem dimensionum summam conficiunt.

De Gua de Malves *sect.* 1. Analyseos cum sibi primum æquationem cubicam secundum dimensionem semiordinatæ y dispositam ob oculos proposuisset, animadvertit quod si deficiat primus terminus gy^3, & sit $g = o$, qui supererit primus æquationis terminus, & altior potentia ipsius y coefficientem habebit $mx + d$, & fiet $= o$ quando erit $x = -\frac{d}{m}$. Quod si bini simul priores termini deessent in æquatione, coefficiens superstitis prioris termini evaderet $ix^2 + ex + b$, qui si debeat in aliquo casu evanescere, resoluta hac ipsa æquatione prodibunt bini aut reales, aut imaginarii valores ipsius x, quibus substitutis coefficiens fiet $= o$. Generatim si tres, quatuor, quinque &c priores termini æquationis cujuscumque ordinis deficerent, & coefficiens termini subsequentis tertiam, quartam, quintam &c potestatem involveret quantitatis x, essent semper tres, quatuor, quinque &c quantitatis ipsius valores imaginarii, aut reales, quibus positis idem etiam coefficiens evanesceret. Jam vero terminis omnibus æquationis per coefficientem primi divisis, & æquatione rite ordinata, coefficiens secundi termini est summa omnium radicum coefficiens tertii est summa omnium binariorum &c, & terminus ultimus est factum omnium radicum. Itaque ubi coefficiens primi termini fiat nullus, quin simul reliqui coefficientes omnes evanescant, infinitum evadet factum omnium radicum, aut summa radicum earumdem, binariorum, ternariorum &c, & aliqua æquationis radix infinita erit, adeoque aliquis erit ramus curvæ, qui excurret ad infinitum. Tot etiam ramos infinitos, & asymptotos habebit curva semiordinatæ y parallellas, quot erunt radices reales abscis-

abſciſſæ x apti nullo efficiendo coefficienti ſuperſtitis primi termini.

Et quemadmodum primis æquationis terminis deficientibus aſymptoti, ita etiam deficientibus ultimis determinantur puncta ſingularia, & multiplicia. Diſponatur propoſita æquatio, tertiæ dimenſionis ex. gr., ad formam trianguli, atque hunc in modum

$$\begin{array}{llll} g y^3 + m x y^2 & + i x^2 y & + k x^3 & = o. \\ \quad + d y^2 & + e x y & + f x^2 & \\ & + b y & + c x & \\ & & + a & \end{array}$$

Patet quod ſi poſterioris columnæ terminus evaneſcat, tota æquatio dividi poterit per $y = o$, & ſemiordinata evaneſcente curva axem ſecabit. Radices igitur novæ æquationis $k x^3 + f x^2 + c x + a = o$, exhibebunt varios valores abſciſſæ x, ſive varias diſtantias communis originis abſciſſarum, & punctorum aliorum, in quibus curva ſecabit axem. Quod ſi novæ hujus æquationis radices binæ æquales ſint, aut binæ interſectiones axis in unam confluent, & habebitur punctum duplex, aut axem tanget curva, & ſic in duobus adhuc punctis abſciſſa cenſebitur curvæ occurrere. Si tres radices æquentur inter ſe, punctum interſectionis aut erit triplex, aut ſimul punctum duplex, & punctum contactus. Si radices omnes ſint imaginariæ, nulla erit curvæ, & axis interſectio.

Quod ſi vero una ex radicibus hujuſmodi realibus ultimi termini nihilo exæquati ſit etiam communis æquationi $i x^2 y + e x y + b y = o$, ſive ſi idem ſit valor abſciſſæ x, quo poſito ultimus ſimul, & penultimus æquationis antea propoſitæ terminus evaneſcat; valor ipſe indicabit aut punctum duplex, aut punctum ſimplex, cujus ſemiordinata y ſit tangens. Sublatis enim duobus poſtremis terminis tota æquatio diviſibilis erit per $y = o$, & rurſus $y = o$, & ſemiordinata in duobus punctis occurret curvæ. Si binæ ultimi termini radices æquales ſint inter ſe, eæque efficiant ut penultimus etiam terminus evaneſcat, punctum neceſſario erit duplex: ipſi enim duplex ſemiordinata, & duplex abſciſſa reſpondebit, quod puncto ſimplici etiam ſingulari convenire

X nul-

nulla ratione potest. Pariter si una ex radicibus realibus ultimi termini nihilo jam exæquati non dumtaxat penultimum, verum etiam antepenultimum terminum in æquatione aliqua altioris ordinis reddat nihilo æqualem; punctum, cui illa abscissa respondebit, aut erit triplex, aut duplex, quod tamen habeat semiordinatam y pro tangente, aut punctum simplex inflexionis, in quo pariter semiordinata ipsa curvam tangat: atque ita porro. Verum ex quo æquatio, quæ posteriore termino æquationis primum propositæ nihilo æquato comparatur, 3, 4, 5 & radices habeat inter se æquales, minime inferri potest punctum necessario esse triplum, quadruplum &c. Potest enim esse punctum dumtaxat duplex binis curvæ ramis se intersecantibus coalitum, in quo abscissa pariter, & semiordinata evadat tangens, & ter curvæ occurrere censeatur.

Ut in ipsa curvæ origine generatim puncta multiplicia detegerit Cl. De Gua de Malves animadvertit quod si constans æquationis terminus a, qui apicem Trianguli analytici occupat, deficiat, origo curvæ, & abscissæ x necessario erit in ipso curvæ perimetro. Æquatio enim $kx^3 + fx^2 + cx = 0$, quæ ex ultimo termino comparabitur, dividi poterit per $x = 0$, sicuti tota æquatio primum proposita dividi poterit per $y = 0$. Deinde si præter terminum constantem a, deficiant etiam termini alii $by + cx$, qui secundam horizontalem lineam trianguli analytici constituunt; ipsa origo curvæ necessario erit aliquod punctum duplex. Etenim terminus ultimus $kx^3 + fx^2$ nihilo exæquatus duas habebit radices æquales $x = 0$, $x = 0$, ipsoque termino evanescente tota æquatio dividi poterit per $y = 0$, $y = 0$. Generatim is erit ordo multiplicitatis puncti in communi origine abscissarum positi, qui numero deficientium terminorum horizontalium in triangulo analytico definietur: & qui ultimus erit terminus æquationis, ac nullam involvet potestatem semiordinatæ y, nihilo exæquatus radicibus suis exhibebit distantias omnes sive reales, sive imaginarias originis abscissarum, & intersectionum curvæ, & axis, quæ intersectiones veluti totidem curvæ vertices spectari possunt. Ita ex sola consideratione æquationis cujuslibet propositæ di-

gno-

gnosci poterit quæ puncta multiplicia, & singularia in ipsa curvæ origine habeantur.

Ut vero dignoscatur num curva aliqua extra ipsam etiam originem singularia, & multiplicia puncta habeat, transformata aequatione referenda est curva ad alium aliquem axem, qui cum priore indeterminatum angulum constituat, aut indeterminato intervallo ab eodem distet. Deinde observandum est quibus in casibus, & quo posito intervallo novi, & prioris axis, aut quo axis utriusque angulo constans æquationis terminus, aut secunda etiam, & tertia, aut alia quævis horizontalis terminorum linea in triangulo Analytico deficiat. Inde etiam eodem modo iisdemque principiis dignosci poterit, quæ alia multiplicia puncta, aut serpentina in curva sint, a quibus transformatæ æquationis abscissae supputari possint. Curvarum ita transformandarum methodum paucis exposuit De Gva de Malves initio totius operis, & fusius exposuerunt Cramerus *cap.* 2. & *sequ.*, & Eulerus *lib.* 2. *cap.* 2. Illi etiam regulas suppeditarunt tangentium ducendarum, & ductis tangentibus puncta singularia distinguere a se invicem docuerunt, & maximas insuper, minimasque curvarum semiordinatas, flexus contrarios, ac regressus, & singulas regressuum species invenire. Denique superiorum ordinum curvas in certas classes, ac genera distributas singillatim enumerarunt.

Verum haec omnis curvarum enumeratio arbitraria fortasse videri posset. Et quidem Newtonus cum diversitatem ramorum in infinitum excurrentium, punctorumque singularium considerasset, tertii ordinis curvas numero 72 fecit: quibus duas adhuc Stirllingius, & quatuor alias De Gva de Malves addiderunt. Eulerus sola ramorum infinitorum consideratione curvarum genera distinxit, & genera curvarum tertii ordinis 16 statuit, & curvarum quarti ordinis 146. Cramerus autem curvarum tertii ordinis genera 14 esse voluit, quarti ordinis 9, quinti 11. Aliis assumptis distributionis totius principiis alius prodiret generum, & classium numerus. Illud maxime interest hacce in re ut proposita aequatione aliqua affectiones curvae omnes determinentur, videaturque

X 2 quae

quae affectionum inveniendarum facilior methodus, ac via sit. Porro fluxionum methodus pro ducendis tangentibus sic expedita, & brevis est ut nihil magis; ad puncta vero multiplicia investiganda semper aptari potest citra illam curvae transformationem, quae plerumque operosa est, & quando puncta extra originem curvae sunt posita Cartesianae Algebrae applicationem reddit complicatiorem. Regressus denique inflexionesque curvarum, & maximæ, ac minimæ ordinatæ fluxionum methodo determinantur, distinguunturque facillime inter se. Quare cum punctorum multiplicium theoriam ex methodo fluxionum sic eduxissem, ut declinaverim difficultates omnes, quas de Gva de Malves Bragelongnio opposuerat, & Mac-Laurini theorema de maximis & minimis ordinatis breviter demonstrassem, invenissemque compendia quædam Problematum Isoperimetricorum, visum fuit singillatim omnia paucis propositionibus complecti.

Problema Primum.

Invenire subtangentem, subnormalem, tangentem, normalem, & interceptam curvae cujuscumque FCL, *fig.* 19.

Resolutio.

Si ACT curvam tangat in puncto C, & sit Mc semiordinatae BC parallella, & fiat ut supra $FB = x$, $BC = y$, $BM = dx$, $cm = dy$, ob similitudinem triangulorum Cmc, ABC, CBH, erit subtangens $AB = \frac{y\,dx}{dy}$, subnormalis $BH = \frac{y\,dy}{dx}$, tangens $AC = \surd\left(y^2 + \frac{y^2\,dx^2}{dy^2}\right) = \frac{y}{dy}\surd(dy^2 + dx^2)$, normalis $CH = \frac{y}{dx}\surd(dy^2 + dx^2)$, intercepta $AF = \frac{y\,dx}{dy} - x$, & perpendicularis $FG = y - \frac{x\,dy}{dx}$. Data igitur aequatione, quae coordinatarum x, & y relationem exprimat, valorem alterutrius fluxionis ex altera definiendo superioribus regu-

regulis evanefcent fluxiones omnes, & prodibunt quæfitæ quantitates. Q. E. J.

Corollarium Primum.

Si curva FCL fit Parabola Apolloniana, & definiatur æquatione $ax=y^2$, erit $dx=\frac{2ydy}{a}$, & fubtangens $\frac{ydx}{dy}=\frac{2y^2}{a}=2x$, fubnormalis $=\frac{1}{2}a$ tangens $=\sqrt{(4x^2+ax)}$, normalis $=\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2+ax\right)}$, intercepta $=x$. Si proponatur Hyperbola intra Afymptotos LCO *fig.* 28., & fit æquatio $xy=ab$, erit fubtangens $BA=-x$, jacebit fcilicet ex parte origini abfciffæ oppofita, & erit ipfi abfciffæ æqualis. Fiet etiam $FT=2y$, $HB=-\frac{y^2}{x}$, $HC=\frac{ab}{x}\sqrt{\left(1+\frac{a^2b^2}{x^4}\right)}$.

Corollarium Secundum.

Si proponatur æquatio $2ay^2=2apx-px^2$, hoc eft fi curva fit ellipfis axis majoris $=2a$, & paremetri $=p$, erit fubtangens $=\frac{2ax-x^2}{a-x}$, fubnormalis $=\frac{p}{2a}(a-x)$. Cum igitur fubtangentis valor ex valore parametri non pendeat ad idem abfciffæ punctum eadem erit fubtangens ellipfium omnium eodem axe majore, & quocumque minore axe defcriptarum. Si proponatur Hyperbola ad axem relata, & fit æquatio $2ay^2=2apx+px^2$, erit fubnormalis $=\frac{p}{2a}(a+x)$, & fubtangens $=\frac{2ax+x^2}{a+x}$, quæ rurfus ex valore parametri non pendebit. Erit etiam, *fig.* 19., intercepta $AF=\frac{ax}{a+x}$. Si proponatur generalis Hyperbolæ æquatio $ay^{m+n}=bx^m(a+x)^n$, erit fubtangens $=\frac{(m+n)(ax+x^2)}{ma+mx+nx}$, & intercepta $=\frac{nax}{ma+mx+nx}$.

Co-

Corollarium Tertium.

Si abſciſſa fiat infinita, & præ ipſa negligantur aliæ quantitates datæ, & conſtantes, prodibit diſtantia originis abſciſſarum, & interſectionis axis cum recta, quæ ad infinitam diſtantiam curvam tangit $= \frac{nax}{mx + nx} = \frac{na}{m+n}$. Evadet etiam æquatio curvæ $ay^{m+n} = bx^{m+n}$, ſive $y \,.\, a^{\overline{\frac{1}{m+n}}} = x \,.\, b^{\overline{\frac{1}{m+n}}}$. Quare cum ſit $dx : dy = AF : FG$, fiet in eadem hypotheſi $FG = \frac{na \,.\, b^{\overline{\frac{1}{m+n}}}}{(m+n) \,.\, a^{\overline{\frac{1}{m+n}}}}$, & ſi per puncta A, & G hoc modo determinata ducatur recta habebitur curvæ aſymptotus. Si curvæ aliæ proponerentur, quarum aſymptoti eſſent plures, æquatio caſus omnes diverſos ſuppeditaret, eademque ſemper ratione Fluxionum methodus aſymptotis quibuſcumque inveſtigandis ſufficeret.

Problema Secundum.

Aſſignare in curva aliqua punctum multiplex.

Resolutio.

Si punctum duplex quærendum ſit, æquatio primum ſecundum dimenſiones ſemiordinatæ y diſponatur. Quia puncto duplici ſemiordinata duplex reſpondet, ut in anteceſſione dictum eſt, & rite ordinata æquatio duas complecti debet radices inter ſe æquales, ſi ſinguli æquationis termini per reſpondentes ſeriei Arithmeticæ terminos multiplicentur, hoc eſt, per ſuperius theorema ſextum, ſi habita ſemiordinata y pro variabili æquationis fluxio accipiatur, & vocentur Y termini omnes qui per dy multiplicantur; æquatio emergens Ydy, per *Coroll.* 2. ejuſdem *Propoſ.*, unam adhuc ex iis radicibus æqualibus puncto duplici reſpondentibus comple-

plectetur, & erit $Ydy = o$. Pariter si dumtaxat abscissa x ut variabilis consideretur, & æquationis secundum dimensiones ipsius x dispositæ accipiatur fluxio $X\,dx$, erit $X\,dx = o$, & unam adhuc æqualium radicum continebit nova ipsa æquatio. At si secunda fluxio acccipiatur, hoc est si Ydy, & $X\,dx$ rursus per alias Arithmeticas series multiplicentur, quæ emerget quantitas nullam amplius aequalium radicum continebit, & constabit ex terminis sese minime destruentibus.

Si vero punctum non duplex, sed triplex sit, in secundae etiam fluxionis expressione una adhuc supererit ex tribus radicibus aequationis curvam definientis, & erit tota eadem fluxio $= o$. At si tertia accipiatur fluxio, neque termini in ipsa omnes evanescent, neque ulla amplius ex tribus radicibus aequalibus supererit.

Eodem modo procedendum est si punctum alia qualibet multiplicitate sit multiplex. Generatim igitur videndum est quo in casu, & quibus positis abscissae, & semiordinatae valoribus tota aequatio, & succedentes aliquot aequationis fluxiones evanescant. Tunc enim ex numero fluxionum successive evanescentium multiplicitas puncti, & ex valore fractionis ultimo loco superstitis multiplicitatis species agnoscetur. Q. E. J.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si sumptis igitur aequationis fluxionibus, & substituto coordinatarum valore aliquo, termini omnes destruantur, curva praeseferet aliquod punctum multiplex, duplex nimirum si tota aequatio, & prima aequationis fluxio pro eodem casu evanescat, triplex si evanescat insuper secunda fluxio &c. Proponatur aequatio ad curvam, quae Newtono est speciei 69, videlicet $py^2 - 2pcy + pc^2 = -2a^3 + 5a^2x - 4ax^2 + x^3$. Erit prima aequationis fluxio $2pydy - 2pcdy = 5a^2dx - 8axdx + 3x^2dx$, in qua termini omnes se destruent substituendo c loco y, & a loco x. Curva igitur punctum multiplex praeseferet ubi erit $c = y$, $a = x$. Ut innotescat cujus generis

neris ſit punctum, ſumatur etiam ſecunda fluxio: quae cum minime evaneſcat factis iiſdem ſubſtitutionibus, & ſuperſit $p\,dy^2 = -a\,dx^2$, praeſto erit punctum non niſi duplex eſſe poſſe.

Corollarium Secundum.

Pariter ſi proponatur æquatio $y^4 + x^4 - 2\,a^2 y^2 - 2\,b^2 x^2 + b^4 = o$, cujus prima fluxio eſt $4\,y^3\,dy + 4\,x^3\,dx - 4\,b^2\,y\,dy - 4\,b^2\,x\,dx$, patet & aequationem totam, & fluxionem ipſam evaneſcere ubi fiat $y = o$, & $x = \pm\,b$. Cum igitur in eodem caſu non evaneſcat amplius ſecunda fluxio, curva in duobus punctis duplicibus ſecabit axem abſciſſarum, poſitis hinc inde ad eamdem diſtantiam $b\,a$ communi abſciſſarum origine. Idem valet de exemplis aliis omnibus a Cramero relatis *cap.* 10. *num.* 170. & *ſequ.* Contra ſi proponatur aequatio $y^4 + x^4 - 4\,a\,(y^3 + x^3) + 6\,a^2\,(y^2 + x^2) - 3\,a^3\,(y + x) = o$, quia poſita $x = a$, $y = a$, ex prima fluxione ſupereſt $a^3\,dy + a^3\,dx$, iis abſciſſae, & ſemiordinatae valoribus punctum multiplex reſpondere nequaquam poterit. Ita juxta noſtram hanc methodum minime ſequitur abſurdum, quod ex regulis Bragelongnii ſequi dixerat De Gva de Malves *ſect.* 2. *lem.* 4. *coroll.* 1.

Corollarium Tertium.

Poterit etiam diſtingui ſpecies puncti multiplicis ducta tangente, ſive, per *Prob.* 1., determinata ratione $dx : dy$ ex prima fluxione, quae ſupererit. Etenim ſi punctum duplex dumtaxat ſit, & duorum ramorum curvae interſectione conſtituatur, fractio $\frac{dx}{dy}$ duos valores diverſos exhibebit. Tangens puncti erit unica, & unius dumtaxat valor ipſius fractionis ſi punctum duplex oſculi ſit, aut amplexus, aut oſculi ſimul, & amplexus, aut denique alicujus regreſſus, qui ex nodo curvae evaneſcente conſtituatur. Punctum duplex ſine tangente erit, & imaginarius prodibit valor fractionis

$\frac{dx}{dy}$ ſi punctum ſit conjugatum, & inviſibile. Ita quia ex prioris Corollarii aequatione $p\,dy^2 = -a\,dx^2$ eruitur $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{p}}$, punctum duplex conjugatum erit curvae, quemadmodum a Newtono ipſo ſtatutum eſt.

COROLLARIUM QUARTUM.

Simili modo innoteſcet ſpecies punctorum triplorum, quadruplorum &c ductis tangentibus. Si punctum genere triplex ſit & fractio $\frac{dx}{dy}$ ex tertia fluxione eruta tres diverſos valores habeat, puncto ipſi tres convenient tangentes, hoc eſt trium ramorum curvae interſectionibus punctum conſtituetur: ſed ſi duo dumtaxat valores hujuſmodi poſſint elici, puncto non niſi binae convenient tangentes, & conſtituetur punctum unico curvae ramo tranſeunte per punctum oſculi, aut amplexus, regreſſuſve, ut mox diximus generati: denique ſi unicus eruatur tangentis valor, punctum triplex orietur ex inviſibili puncto duplici in curvae perimetro alicubi conſtituto. Exemplum demus ex Cl. de Bragelogne 1. *par.* §. 60. In curva, quæ definitur æquatione $ay^3 - 3acy^2 + 3ae^2y = ae^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{2}a^4$, ſi fiat $y = e$, & $x = a$, poſt tres acceptas ſucceſſive fluxiones ſupereſt $\frac{dy^3}{dx^3} = \frac{1}{3}$. In hoc igitur caſu unica erit tantummodo curvæ tangens, & inviſibile punctum duplex curvae perimetro inhaerebit.

COROLLARIUM QUINTUM.

Si in primae fluxionis expreſſione pro caſu aliquo evaneſcant termini omnes affecti fluxionibus dx, dy, poſtmodum etiam evaneſcent termini affecti aliis fluxionibus ddx, ddy, $dddx$, $dddy$ &c. Quare in accipiendis aliis aequationis propoſitae fluxionibus compendium quoddam habebitur,

quod scilicet dx, & dy accipi possint pro constantibus. Hoc ipso praesto erit quibus conditionibus prodeat punctum multiplex. Quod duplex est prodit nihilo exæquando æquationem totam, & duos coefficientes quantitatum dx, dy in primae fluxionis expressione. Ad punctum triplex inveniendum debent insuper nihilo æquari tres coefficientes quantitatum dx^2, $dxdy, dy^2$, & ad habendum punctum quadruplex quatuor insuper membra tertiæ fluxionis &c. Quæ cum ex suis etiam principiis deduxerit De Gva de Malves, difficultates alias præoccupavimus, quas author ipse Bragelongnio opposuerat in *coroll.* 1. lemmatis ejusdem quarti. Cæterum authoris methodus differentiali calculo undique affinis est.

Problema Tertium.

Invenire punctum singulare, quod non sit multiplex.

Resolutio.

Quia recta, quæ curva tangit in puncto inflexionis aliquo visibilis, aut invisibilis, censetur curvæ ipsi occurrere in tot punctis, quotuplex est gradus inflexionis, atque insuper duobus aliis, recta vero alia quæcumque non nisi in unico puncto occurrit; si curvæ alicujus semiordinatæ tangenti parallellæ sint, ut denique semiordinata in tangentem migret, abscissa in unico semper puncto occurret curvæ, semiordinata vero, quæ curvam tanget, in duobus punctis occurret si nullum in contactu habeatur punctum singulare, occurret autem in pluribus si punctum sit multiplicis inflexionis, in tribus scilicet si inflexio sit primi generis, in quatuor si sit secundi &c. Itaque in æquatione, quæ relationem coordinatarum exprimit, secundum abscissæ dimensiones disposita nullæ esse debent radices inter se æquales. At si secundum potestates semiordinatæ æquatio disponatur, binæ esse debent radices inter se æquales ubi punctum quod a semiordinata tangitur non sit singulare, tres ubi punctum inflexionem primi generis subeat, quatuor ubi subeat inflexionem secundi generis

neris &c. Itaque etiam ſumptis juxta regulas ſuperiores fluxionibus æquationis, abſciſſis habitis pro fluentibus nullæ fluxiones evaneſcent, at habitis pro fluentibus ſemiordinatis tot evaneſcent ſuccedentes fluxiones quot unitates erunt in indice multiplicitatis inflexionis una addita, binæ videlicet fluxiones evaneſcent ſi inflexio ſit primi generis, tres ſi ſecundi generis ſit inflexio &c. Q. E. I.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si proponatur curva æquationis $y^4 - by^3 - cx = o$, & requiratur quod ſingulare punctum habeat ubi axem ſecat, & ſit $y = o$, inprimis æquationis fluxio $4y^3\,dy - 3by^2\,dy - c\,dx$ accipienda eſt: quæ quoniam pro eodem caſu non evaneſcit, argumento erit in ipſa curvæ origine punctum multiplex eſſe non poſſe. At ſi dumtaxat ſemiordinatæ pro fluentibus habeantur, prima æquationis fluxio $4y^3\,dy - 3by^2\,dy$ evaneſcet, ubi erit $y = o$. Pariter ſecunda fluxio $12y^2\,dy^2 - 6by\,dy^2$ pro eodem caſu fiet $= o$. At ſumptis tertiis fluxionibus, factaque $y = o$, ſupererit $- 6b\,dy^3$. Ibidem igitur curva inflexionem primi generis præſeferet.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Simili modo innoteſcet Parabolam cubicam, quæ definitur æquatione $y^3 = a^2 x$, punctum inflexionis habere in ipſo vertice. Parabola aequationis $y^4 = a^3 x$ habebit in vertice punctum duplicis inflexionis, ſive ut vocabat Maupertuiſius punctum ſerpentinum. Punctum etiam ſerpentinum in ipſa origine habebit curva aequationis $y^5 - by^4 - x = o$. Parabola aequationis $y^5 = a^4 x$ habebit in vertice punctum triplicis inflexionis, ſeu punctum ſerpentinum quod ſimul inflexionem viſibilem ſubibit, & generatim ſi ſit aequatio $y^m = a^{m-1} x$, erit gradus inflexionis $m - 2$.

COROLLARIUM TERTIUM.

Data ergo aequatione curvae, cujus semiordinatae parallellae sint tangenti singularis alicujus puncti, ut demum cum tangente ipsa congruant, & sumptis aequationis fluxionibus innotescet species puncti singularis. Quod si vero punctum aliquod singulare habeat curva, nec tamen semiordinatarum ad axem positio sit, ut cum tangente ipsius puncti parallellismum servent, aequatio curvae transformanda erit in aliam, quae relationem abscissarum ad semiordinatas tangenti parallellas exprimat. Punctorum hujusmodi inventio ope Algebrae Cartesianae, & methodi Fluxionum aeque operosa erit: ad alia singularia puncta invenienda methodus Fluxionum magis expedita, ac simplex erit. Breviores inflexionum determinandarum regulas inferius explicabimus.

PROBLEMA QUARTUM.

Invenire punctum quod simul multiplex, & multiplicis inflexionis sit.

RESOLUTIO.

Si punctum sit simul multiplex, & multiplicis inflexionis, abscissa in tot punctis dumtaxat occurret curvae, quot unitates erunt in indice multiplicitatis puncti, semiordinata vero, quae etiam evadet tangens, in tot curvae punctis occurret, quot unitates erunt in indice multiplicitatis puncti simul, & multiplicitatis inflexionis una addita, in quatuor scilicet si punctum duplex dumtaxat sit, & inflexionem primi generis subeat, in quinque si punctum duplex subeat inflexionem secundi generis, in sex punctis si subeat inflexionem tertii &c. Sumptis igitur successivis fluxionibus aequationis, semiordinatisque, & abscissis habitis pro fluentibus, tot evanescent hujusmodi fluxiones quot unitates erunt in indice multiplicitatis puncti una dempta: at semiordinatis dum-

taxat

taxat habitis pro fluentibus, tot a prima incipiendo, fluxiones evanescent, quot unitates erunt in exponente multiplicitatis puncti simul, & inflexionis. Observando igitur quibus in casibus, & quo posito valore abscissae, & semiordinatae, & tota aequatio, & subsequentes hujusmodi fluxiones evanescant, singularitas puncti, & singularitatis species dignoscetur. Q. E. I.

COROLLARIUM.

Hac regula punctum duplex, & simplicis inflexionis deprehendetur in curva, quae definitur aequatione $y^5 - b y^4 - c x^3 + m x^2 = o$. Præsto erit etiam utrum ex tribus ramis punctum triplex curvae alicujus propositae constituentibus unus, aut bini, aut tres simul inflexionem aliquam subeant primi, secundi, tertii generis &c: aut si duorum ramorum alicubi se intersecantium alteruter in ipso puncto intersectionis serpet &c. Sed hic quoque si semiordinatae non sint tangenti puncti inflexionis parallellae, eadem curvae transformatione, quam superius indicavimus, opus erit.

PROBLEMA QUINTUM.

Data semiordinata alicujus curvae, & fluxione axis determinare semiordinatas proxime antecedentes, & subsequentes.

RESOLUTIO.

Fiat in curva PML, *fig.* 29., $PN = x$, $NA = dx$, $NB = -dx$, $NM = y$, & Newtoniano more exprimatur relatio coordinatarum x, y generali aequatione $y = A + ax + bx^2 + cx^3$ &c: ad cujus aequationis formam quaslibet aequationes reduci posse quisque facile intelliget si in peculiari casu, deficiente potestate aliqua ipsius x, fiat potestatis deficientis coefficiens $= o$. Ut ex hac aequatione eruatur valor semiordinatae AF abscissae PA respondentis substituatur $x + dx$ loco x.

Tum

Tum vero ordinatis terminis prodibit

$$AF = A + ax + bx^2 + cx^3 \text{ \&c}$$
$$+ a\,dx + 2bx\,dx + 3cx^2\,dx \text{ \&c}$$
$$+ b\,dx^2 + 3cx\,dx^2 \text{ \&c}$$
$$+ c\,dx^3 \text{ \&c.}$$

Porro ex eadem generali aequatione sumptis fluxionibus, si abscissae x aequabiliter fluant, & sit $ddx = o$, habebitur

$$dy = a\,dx + 2bx\,dx + 3cx^2\,dx \text{ \&c}$$
$$ddy = 2b\,dx^2 + 6cx\,dx^2 \text{ \&c}$$
$$dddy = 6c\,dx^3 \text{ \&c.}$$

Erit igitur $AF = y + dy + \frac{ddy}{1.2} + \frac{dddy}{1.2.3}$ &c.

Si abscissae fluxio dx negativo signo accipiatur, negativa etiam evadent signa terminorum numero parium, & manentibus reliquis ut antea fiet semiordinata

$$BC = y - dy + \frac{ddy}{1.2} - \frac{dddy}{1.2.3} \text{ \&c. Q. E. I.}$$

COROLLARIUM PRIMUM.

Ex serie totius calculi manifestum est hos semper semiordinatae antecedentis, & subsequentis valores esse, quotcumque sint generalis curvae aequationis termini qui deficiant. Idipsum sinthesi elegantissima fusius demonstravit Mac-Laurinus *Prop.* 20. *lib.* 1. Analytica tamen demonstratio quam protulit *lib.* 2. §. 751. minime casus omnes complectitur. Primo enim ponit $y = A + Bz + Cz^2 + \mathcal{D}z^3$ &c, & pro coefficientibus determinandis statuit Mac-Laurinus evanescente z esse E valorem ipsius y, & dE, ddE, $dddE$ &c valores ipsarum dy, ddy, $dddy$ &c. Hoc posito cum sit $y = A + Bz + Cz^2 + \mathcal{D}z^3$ &c, facto $z = o$, erit $y = E = A$. Pariter sumptis fluxionibus erit $\frac{dy}{dz} = B + 2Cz + 3\mathcal{D}z^2$ &c, adeoque pro eodem casu $B = \frac{dy}{dz} = \frac{dE}{dz}$: & rursus fluxiones alias accipiendo erit $\frac{ddy}{dz^2} = 2C + 6\mathcal{D}z$ &c, & posito $z = o$

erit

erit $C = \frac{ddy}{2dz^2} = \frac{ddE}{2dz^2}$, & ita porro. Quare si pro dz ſcribatur 1 erit $y = E + z\,dE + \frac{z^2\,ddE}{1.2} + \frac{z^3\,dddE}{1.2.3}$ &c, & si fiat $z = dz = 1$, erit $y = E + dE + \frac{ddE}{1.2} + \frac{dddE}{1.2.3}$ &c. Hac autem ratione ſuperius theorema iis tantum casibus accommodaretur, in quibus ſupputando abſciſſas ex puncto N nullae deficerent poteſtates ipsius z. Nam si in aequatione deficiat z^2, hoc eſt si sit $C = o$, erit etiam $ddy = ddE = o$.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si in eodem curvae puncto M ducatur tangens MT, erit prima ſemiordinatae fluxio $dy = OT$, adeoque erit TF, quae tangente, & curva intercipietur $= -\frac{ddy}{1.2} - \frac{dddy}{1.2.3}$ &c, & $HC = -\frac{ddy}{1.2} + \frac{dddy}{1.2.3}$ &c. Quare si puncta C, M, F proxima intelligantur, negligi poterit tertia ſemiordinatae fluxio prae ſecunda, & aliis inferiorum ordinum fluxionibus omiſſis ſtatui poterit $TF = HC = -\frac{1}{2}\,ddy$: aut si curva axem verſus non concava, ſed convexa sit, ſecunda ſemiordinatae fluxio per *Coroll.* 2. *Theor.* 1. fiet positiva, & quae curvae, & tangenti interjicietur lineola erit $= \frac{1}{2}\,ddy$.

PROBLEMA SEXTUM.

Invenire radium circuli MQ eamdem curvitatem cum curva PML habentis in puncto M, *fig.* 30.

RESOLUTIO.

Si curvae & circuli eadem curvitas intelligatur in puncto M erit $mv = mr$, & si puncta M, & m ſumantur proxima

ma inter ſe erit inſuper $mH = MR$, & per Corollarium antecedens habebitur $mv = -\frac{1}{2} ddy$. Hoc ipſo fiet $dx^2 + dy^2 = mM^2 = -\frac{1}{2} ddy . MR$, & $MT = \frac{1}{2} MR = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Eſt autem $MN : MT = MC : MQ$. Quare si MN vocetur y, erit radius oſculi, ſeu curvedinis $MQ = \frac{MC . (dx^2 + dy^2)}{-yddy}$. Quod si valorem normalis MC ex formula radii oſculatoris eliminare placeat, ſubſtituatur pro normali ipſa $\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$. Tum enim radius oſculi evadet $= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, & in peculiari quolibet caſu ſubſtitutis rurſus valoribus fluxionum dy^2, ddy, radii quæſiti valor fluentibus dumtaxat quantitatibus definietur. Q. E. I.

COROLLARIUM.

Si radius oſculi ellipſeos exempli loco quæratur, & fiat $2ay^2 = 2apx - px^2$, adeoque $dy = \frac{2apdx - 2pxdx}{4ay} = \frac{apdx - pxdx}{2\sqrt{\left(\frac{2a^2px - apx^2}{2}\right)}}$, & dx conſtans intelligatur, erit $ddy = \frac{-a^3p^2dx^2}{4\left(\frac{2a^2px - apx^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p^2dx^2}{4y^3}$, & radius oſculi evadet $= MC . \frac{4y^2(dx^2 + dy^2)}{p^2dx^2} = \frac{4MC^2}{p^2}$.

PROBLEMA SEPTIMUM.

Invenire maximam, aut minimam curvæ ſemiordinatam.

RESOLUTIO.

Manentibus omnibus ut in quinto Problemate, & *fig.* 29., ſtatuatur caſus quod prima ſemiordinatæ fluxio nulla ſit. Evaneſcet etiam ſubnormalis curvæ $\frac{ydy}{dx}$, & ſubnormali evaneſcente tangens evadet axi parallella. Tum vero fiet $AF = y + \frac{1}{2} ddy$ &c, & $BC = y + \frac{1}{2} ddy$ &c, nimirum ubi ſecunda ſemiordinatæ fluxio ſit poſitiva, & curva convexitatem ſuam axi obvertat, utraque ſemiordinata proxime antecedens, & ſubſequens major erit ſemiordinata intermedia NM, & ſemiordinatæ valor ex æquatione erutus erit minimus. Si curva axem verſus ſit concava, & ſecunda ſemiordinatæ fluxio negativa, prima fluxione evaneſcente, ſemiordinata ipſa fiet maxima. Quod ſi prima ſimul, & ſecunda ſemiordinatæ fluxio evaneſcat, erit ſemiordinata proxime antecedens $= y - \frac{1}{6} dddy$ &c, ſubſequens vero $= + \frac{1}{6} dddy$ &c, ſcilicet y nec maxima erit nec minima omnium ſemiordinatarum. At ſi evaneſcat inſuper tertia fluxio, evadet ſemiordinata antecedens $= y + \frac{1}{24} ddddy$ &c, & ſubſequens $= y + \frac{1}{24} ddddy$ &c, hoc eſt ſi valor quartæ hujus fluxionis ſit poſitivus ſemiordinata intermedia erit omnium minima, maxima vero ſi negativus. Ita diſcurrendo per reliquos caſus omnes manifeſtum fiet quod ſi alicubi prima ſemiordinatæ fluxio evaneſcat, & ſimul etiam evaneſcat numerus aliquis par ſuccedentium fluxionum 0, 2, 4, 6 &c, curva eo in loco exhibebit maximum aliquod, aut minimum: maximum utique ſi prima fluxio poſt evaneſcentes omnes ſuperſtes ſit negativa, minimum ſi poſitiva. Q. E. I.

Contingere aliquando poterit quod prima ſemiordinatæ fluxio exprimatur fractione, cujus numerator quidem ſit data quantitas, denominator vero ſit $= o$, ſive, ut dici aſſolet, quod dy ſit infinita. Tunc evaneſcet ſubtangens curvæ,

Z quæ

quæ fractione $\frac{ydx}{dy}$ exprimitur, & subtangente evanescente evadet tangens axi perpendicularis. Erit vero semiordinata antecedens $= y - \frac{1}{0} + \frac{1}{2} ddy$ &c, & subsequens $= y + \frac{1}{0} + \frac{1}{2} ddy$ &c: adeoque si in eodem curvæ ramo reperiantur semiordinatæ, nec simul majores, nec simul minores erunt semiordinata intermedia, & y nec maxima erit, nec minima. Ramum curvæ eumdem voco, in quo coordinatæ exprimuntur æquationibus, quæ specierum, & signorum ratione eædem sint. Ita in circulo maximum, quod habetur erecta ex centro perpendiculari ad diametrum, in eodem curvæ ramo est, ex utroque perpendicularis ejusdem latere continuato: utrimque enim semiordinatæ exprimuntur unica quantitate $\sqrt{(ax - x^2)}$, quemcumque demum valorem obtineant abscissæ x. At vero in Parabola cubica $GAFM$, *fig.* 31., in qua abscissis CN, CD supputatis a puncto C, & posita $CE = EF = a$, æquatio habetur

$$y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 = a^3 - 3a^2x + ax^2$$

sive $y = a + a^{\frac{1}{3}}(\pm a \mp x)^{\frac{2}{3}}$

ramos GF, FM diversos voco, quia diversis valoribus amborum coordinatæ exprimuntur, superioribus signis pro priore ramo valentibus, & inferioribus pro posteriore. In ramis autem hujusmodi præsto est, quod cum ubique semiordinatarum valores non definiantur eadem omnino æquatione, prima, tertia, quinta, & aliæ omnes imparis ordinis fluxiones utrobique esse poterunt sub eodem signo. Ita si fiat $CE = x$, $EF = y$, erit semiordinata in priore ramo proxime antecedens $= a + a^{\frac{1}{3}}(a - x + dx)^{\frac{2}{3}} = a + a^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} a^{\frac{1}{3}} (a-x)^{-\frac{1}{3}} dx$ &c $= y + dy - \frac{1}{2} ddy$ &c, & semiordinata in posteriore ramo proxime subsequens $= a + a^{\frac{1}{3}}(-a + x + dx)^{\frac{2}{3}} = y + dy - \frac{1}{2} ddy$ &c: adeoque in puncto F, ubi tangens evadit axi perpendicularis, & valor ipsius dy fractione exprimitur, cujus numerator nullam rationem assignabilem ad deno-

denominatorem habet, prodibit minimum. In aliis curvis utrimque axi accedentibus, & in quibus prima semiordinatæ fluxio est negativa, pro eodem casu non minimum, sed maximum haberetur.

COROLLARIUM PRIMUM.

Ut regulas explicemus exemplo aliquo quæratur quo in loco maximum aut minimum habeat curva, quæ definitur æquatione $3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4 = c^3y$. In primis sumptis fluxionibus prodibit $12x^3 - 84ax^2 + 168a^2x - 96a^3 = \frac{c^3dy}{dx}$, & $36x^2 - 168ax + 168a^2 = \frac{c^3ddy}{dx^2}$. Si fiat $dy = 0$, erit etiam $x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 = 0$: cujus æquationis cubicæ tres divisores sunt $x - a = 0$, $x - 2a = 0$, $x - 4a = 0$. Jam vero si in secundæ fluxionis expressione pro abscissa x substituantur successive a, $2a$, $4a$ prodibunt successivi valores ipsius $\frac{c^3ddy}{dx^2}$, $36a^2$, $-24a^2$, $72a^4$. Curva igitur maximum præseferet, quod abscissæ $2a$ respondebit, & duo insuper minima respondentia abscissis a, & $4a$.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Ex his etiam consequitur deficere hacce in re methodum Hospitalii, aliorumque qui Hospitalium secuti sunt, Wolfii, Deidierii, Agnesiæ &c: cum neque pro distinguendis maximis omnibus, minimisque a se invicem, neque pro maximo, aut minimo aliquo certe indicando methodus ipsa sufficiat. Falsum est enim semiordinatam maximam ibi, aut minimam semper esse, ubi prima semiordinatæ fluxio evanescit. Regulæ defectum attigit Boscovichius cum invenisset casum, in quo prima fluxione evanescente semiordinata non refert maximum, aut minimum. Genuinam maximorum, minimorumque theoriam Mac-Laurinus primus omnium explicavit. Neque tamen generatim verum est, quod cum Hospitalio Mac-Laurinus in Tractatu Fluxionum §. 865. con-

tendebat, prima fluxione evadente infinita haberi ſemper maximum, aut minimum: niſi in peculiaribus iis caſibus, de quibus antea dictum eſt.

Problema Octavum.

Invenire flexus contrarios curvarum.

Resolutio.

Quia curvæ *PML* flexu contrario in *M*, *fig.* 32., 33., ex concavis fiunt convexæ ad eamdem partem, aut ex convexis fiunt concavæ, per *Coroll.* 2. primi Theorematis punctum inflexionis *M* erit illud, in quo ſecunda ſemiordinatæ fluxio ex negativa fiet poſitiva, aut vice verſa. Itaque in primo caſu, quo ſcilicet curvarum concavitati convexitatem ſuccedere intelligitur, prima fluxio ſemiordinatæ te defluet ſucceſſive, imminueturque uſque ad *M*, tum vero fluere incipiet, atque augeri. In caſu altero contrarium accidet. Itaque prima ſemiordinatæ fluxio in priore caſu minimum aliquod conſtituet in puncto *M*, & maximum in caſu altero: hoc eſt, per *Probl.* 7., utrobique fluxio ipſius fluxionis, ſive ſecunda ſemiordinatæ fluxio evaneſcet, & ſi quæ aliæ fluxiones pariter evaneſcent, eæ numero pares erunt 2, 4, 6 &c, & quidem in primo caſu fluxio poſt omnes evaneſcentes ſuperſtes poſitiva erit, & in caſu altero negativa. Sive ergo maneat in puncto *M* prima ſemiordinatæ fluxio, ſive non, ſi evaneſcentium aliarum ſemiordinatæ fluxionum numerus fuerit 1, 3, 5, 7 &c curva inflectetur in puncto *M*: & ſi prima fluxio poſt omnes evaneſcentes ſuperſtes ſit poſitiva, curva *PML* ex concava fiet convexa, ex convexa autem fiet concava ſi eadem ſuperſtes fluxio ſit negativa. Et quia in ramorum diverſorum confiniis haberi etiam poteſt maximum, aut minimum evadente infinita prima fluxione ſemiordinatæ; flexus contrarius curvarum haberi etiam poterit ubi ſecunda ſemiordinatæ fluxio non evaneſcat quidem, ſed fiat infinita. Q. E I.

Co-

COROLLARIUM PRIMUM.

Ita ſi proponatur æquatio $ay = a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x^2$, & fiat ſecunda fluxio $-\frac{1}{4} a^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2 + 2 dx^2 = 0$, ibi habebitur punctum inflexionis ubi erit $x = \frac{1}{4} a$, & $y = \frac{9}{16} a$: & quia tertia, quæ ſupereſt fluxio, afficitur ſigno poſitivo, ſic comparata erit flexio, ut concavitatem curva in convexitatem mutet. Hic igitur rurſus deficit Hoſpitalii, aliorumque methodus, qui puncta inflexionis ex eo ſatis determinari exiſtimabant quod ſemiordinatæ ſecunda fluxio evaneſceret.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Si prima ſimul, & ſecunda ſemiordinatæ fluxio pro eodem caſu eſſet nulla, in puncto inflexionis tangens fieret axi parallella: & contra eſſet tangens axi perpendicularis ſi prima ſemiordinatæ fluxio evaderet infinita. Valent hæc omnia de iis etiam curvarum inflexionibus, quibus regrediuntur curvæ ipſæ, & ad eamdem partem ex concavis fiunt convexæ, *fig.* 35. Quibus regulis regreſſus alii, & cuſpides curvarum, *fig.* 34., inveniri poſſint mox indicabimus.

PROBLEMA NONUM.

Invenire regreſſus omnes curvarum.

RESOLUTIO.

Si curva FC, *fig.* 19., verſus axem $F\mathcal{D}$ ſit concava, & fluat BC ex F verſus $\mathcal{D}$, augebitur ſemper FA, quæ abſciſſarum origine, & tangente intercipitur. Quod ſi vero in puncto aliquo C ad originem ipſam curva regrediatur, intercepta imminui incipiet. Itaque intercepta $\frac{y\,dx}{dy} - x$ in

pun-

puncto regressus evadet maxima, & fluxionem accipiendo fiet nulla, aut infinita in eodem puncto $\frac{dy^2 dx - ydxddy - dy^2 dx}{dy^2}$, sive $-\frac{ydxddy}{dy^2}$, adeoque etiam ddy. Si curva versus axem convexa proponeretur, foret $x - \frac{ydx}{dy}$ intercepta, & interceptæ fluxio $\frac{ydxddy}{dy^2}$. Quare ubi ddy fiat infinita, aut, si fiat nulla, non evanescant simul subsequentes imparis ordinis fluxiones, in utroque casu intercepta evadet maxima, aut minima, & curva regressum aliquem habere poterit in puncto C. Q. E. I.

COROLLARIUM.

Etiam si curva inflexionem simplicem sine regressu habeat intercepta ad C usque augeri, aut minui debet, ac postmodum contrariis gradibus minui, & augeri. Ut autem flexus, regressusque distinguantur inter se invicem, observandum est in curvæ regressibus, *fig.* 34., & 35., abscissæ maximum, aut minimum aliquod haberi: quod in inflexione simplici non contingit, *fig.* 32., & 33., Et quidem si regrediendo curva cuspidem exhibeat, *fig.* 34., semiordinata simul, & abscissa evadet maxima, aut minima.

PROBLEMA DECIMUM.

Data lege quantitatis cujuspiam crescentis, aut decrescentis, invenire quo in loco evadat maxima, aut minima.

RESOLUTIO.

Si proponatur variabilis quæpiam quantitas, quæ data lege, atque ad certum usque terminum crescat, tum vero decrescere incipiat, & definire oporteat quo in loco incrementum inter, decrementumque quantitas ipsa evadat maxima,

ma, aut minima; iisdem omnino regulis utendum erit. Potest enim quantitas omnis variabilis exprimi semiordinata variabili alicujus curvæ: unde quæ jam de maximis, aut minimis semiordinatis fuerunt dicta, valebunt etiam de maximis aliis, aut minimis quibuscumque. Exemplo rem omnem explicemus. Sit *PQ* recta positione data, *fig.* 36., & rectus angulus *ABC* moveatur circa verticem *B*, & quæratur quo in loco summa lateris *BC*, & lateris alterius *AB* ducti in constantem quantitatem *m* evadat minima. Fiat perpendiculum $BM = a$, $AM = x$, $AB = \surd(a^2 + x^2)$, $BC = \frac{a}{x}\surd(a^2 + x^2)$.

Si quantitatis $m\surd(a^2 + x^2) + \frac{a}{x}\surd(a^2 + x^2)$ prima fluxio accipiatur, atque ea exæquetur nihilo prodibit æquatio $mx^3 = a^3$. Hoc autem substituto valore ignotæ *x*, non amplius evanescit secunda fluxio. Itaque si quærantur duæ mediæ proportionales unitatem inter, & quantitatem *m*, & fiat ut prima ad secundam ex ipsis duabus mediis ita $MA : BM$, erit *A* locus minimi. Q. E. I.

Sed potest etiam problema converti in aliud, in quo maximum aliquod quæratur: nam semper minimo aliquod maximum respondet, & vice versa. Ita si alicubi $m . BA + BC$ sit minimum, moto triangulo circa verticem, & ductis ad rectos angulos aliis quibuslibet *Ba*, *Bc*, erit $m . Ba + Bc > m . BA + BC$. Hoc posito triangulum *Bac* poterit semper recta aliqua *DF* rectæ *PQ* parallella sic dividi, ut sit $m . BD + BF = m . BA + BC$. In triangulo autem ipso *BDF* perpendiculum *Bm* semper erit minus perpendiculo *BM*. Propositum igitur problema huc recidet ut ex triangulis omnibus, in quibus constans est summa unius lateris, & alterius ducti in constantem quantitatem aliquam, quæratur illud, cujus altitudo sit maxima. Quod quidem sic reductum problema cum instituto calculo difficilior evadere videatur, Geometrice tamen, ope *Propos.* 41. *Lib.* 3. *Conic.* Apollonii, ad eosdem terminos facile reduci potest.

Quod si insuper consideretur in loco minimi fluxionem summæ $m . BA + BC$ nullam esse, &, ductis *Ba*, *Bc* infinite

pro-

proximis, fieri $m.BA - m.Ba + BC - Bc = 0$, patebit tertia resolvendi problematis hujus methodus, quærendo locum, ex quo dimoto aliquantulum triangulo, incrementum unius lateris æquetur decremento alterius ducto in constantem quantitatem. Quod rursus Geometrice præstari poterit. Scilicet si radiis BA, BC describantur circulares arcus AN, CR, erit $Na = \frac{AM.NA}{BM}$, & $Rc = \frac{MC.BC.NA}{BM.BA}$, adeoque $\frac{m\ AM.NA}{BM} = \frac{MC.BC.NA}{BM.BA}$: unde rursus eruetur $m.AM^3 = BM^3$. Si triangulum ABC obliquangulum statueretur, paulo equidem longior, sed prorsus similis esset calculus.

Ita unico exemplo ob oculos posuimus triplicem methodum, quæ problematis hujus generis resolvendis potest conducere, nimirum aut fluxionem variabilis quantitatis nihilo exæquando, aut propositum minimi problema in problema alicujus maximi convertendo, & vice versa, aut quantitatem ipsam variabilem transferendo in locum proximum, atque incrementa, & decrementa coæquando inter se invicem. Prior methodus cum magis obvia, ac trita sit, sæpe sæpius magis expedita est tertia, & simpliciores, elegantesque Problematum hujusmodi solutiones suppeditat. Eadem etiam solvendis Problematis Isuperimetricis sufficiet, ut mox videbimus.

PROBLEMA UNDECIMUM.

Determinare curvam, quæ proprietatem aliquam maximo, aut minimo gradu exhibeat.

RESOLUTIO.

Accipiantur in curva quæsita AHE, *fig.* 39., bina elementa abscissæ BC, CD, semiordinatæ MG, NT, perimetri GT, TF, productaque GT in P ducantur duo alia alterius curvæ elementa GP, FP prioribus infinite proxima. Primo cum extremorum punctorum H, E distantia, & locus non detur, pendeatque ex vario constantium quantitatum

tum æquationem curvæ afficientium valore, proprietas eadem maximi, aut minimi quæsitæ curvæ convenire debet, quamcumque exiguam portionem extrema puncta intercipiant, debet scilicet convenire & toti curvæ, & singulis ipsius partibus; secus HG, & curva alia ex elementis aliis composita eamdem simul proprietatem maximo gradu, aut minimo præseferret. Deinde ex iis quæ modo diximus, consequitur non posse eamdem proprietatem elementis $BGTC$, $CTFD$ convenire, nisi etiam elementis $BGPC$, $CPFD$ ita conveniat, ut differentia omnis evadat nulla. Denique si radiis FT, GP describantur circulares arcus TO, PO, ob similitudinem triangulorum TNF, POT, & GMT, PoT prodibit $PO = \frac{NT.TP}{TF}$, & $To = \frac{MG.TP}{GT}$. Datis hisce omnibus si intelligamus elementa $BGTC$, $CTFD$ retinere proprietatem suam dum abeunt in elementa proxima $BGPC$, $CPFD$, æquationem habebimus hujus formæ $(X - X + dX).TP = o$, sive $dX = o$: quod indicabit fluentem X constanti quantitati esse æqualem, & æquationem curvæ quæsitæ suppeditabit. Q. E. I.

Exempli alicujus loco determinanda sit curva HTE ejus natuæ & indolis ut in ipsa corpus brevissimo tempore descendat: quod primum a Galilæo excogitatum problema est; ac deinde a Johanne Bernoullio propositum, & a Johanne simul, & Jacobo fratre, a Newtono, Leibnitio, Hospitalio, Fatio resolutum. Quia tempus est directe ut spatium percursum, & reciproce ut velocitas, velocitas vero in corporibus decidentibus æquatur radici altitudinis ductæ in duplam vim gravitatis, adeoque subduplicatam altitudinis rationem sequitur; quantitas $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TF}{\sqrt{AC}}$ ubique in quæsita curva erit minima. Hoc ipso fiet $\frac{GT}{\sqrt{AB}} + \frac{TF}{\sqrt{AC}} = \frac{GP}{\sqrt{AB}} + \frac{PF}{\sqrt{AC}}$. Quare cum sit $GP = GT - To$, & $PF = TF + PO$, deletis utrimque æqualibus supererit $\frac{PO}{\sqrt{AC}} - \frac{To}{\sqrt{AB}} = \frac{NT.TP}{TF\sqrt{AC}} -$

$\frac{MG.TP}{GT.\sqrt{AB}} = \frac{d.MG.TP}{GT.\sqrt{AB}} = o$, & fluens quantitas $\frac{MG}{GT.\sqrt{AB}}$ conſtanti quantitati æqualis erit. Id vero in vulgari cycloide GFR, *fig.* 37. locum habet, in qua eſt $Nn : NQ = CM : MR = PM : PR = \sqrt{PC} : \sqrt{PR}$, adeoque eſt $\frac{Nn}{NQ.\sqrt{PC}} = \frac{1}{\sqrt{PR}}$.

Si in Plano inclinato deſcendat corpus perinde erit: quippe adhuc conſtans manebit vis, qua in plano inclinato corpus ad deſcenſum urgebitur, & ad vim abſolutam gravitatis ſe habebit in conſtanti ratione altitudinis plani ad longitudinem.

Si corpus in cycloide deſcendat, facile admodum oſtendi poterit arcum quemcumque FR eodem ſemper tempore percurſum iri. Quia enim velocitas corporis deſcendentis æquatur radici altitudinis ductæ in duplam vim gravitatis, erit tempus, quo abſolvetur arcus NQ ut $\frac{NQ}{\sqrt{2AC}}$. Quia vero cycloidis tangens NT parallella eſt ſubtenſæ MR circuli generatoris PMR, & eſt $CR : RM = Qn : NQ$; erit tempus ipſum ut $\frac{Cc.RM}{CR.\sqrt{2AC}} = \frac{Cc.\sqrt{PR}}{\sqrt{(2AC.CR)}} = \frac{Cc.\sqrt{PR}}{CO.\sqrt{2}}$, deſcripto ſcilicet ſemicirculo AOR. Eſt autem elementum circularis arcus $Oo = \frac{Cc.AV}{CU}$. Itaque tempus deſcenſus per NQ erit ut $\frac{Oo\sqrt{PR}}{AV.\sqrt{2}}$, & tempus deſcenſus per totum cycloidis arcum FR erit ut $\frac{AOR.\sqrt{PR}}{AV.\sqrt{2}}$, ſive $\frac{PMR}{\frac{1}{2}\sqrt{2PR}}$, nimirum conſtans. In cycloide igitur oſcillationes omnes erunt æquidiuturnæ, & quia $\sqrt{2PR}$ exprimit tempus deſcenſus per diametrum PR, ſeu per dimidiam longitudinem penduli cycloidalis, erit tempus unius ſemioſcillationis in cycloide ad tempus deſcenſus per dimidiam longitudinem penduli ut ſemiperipheria ad diametrum.

Inde etiam alia deduci poſſunt. Ex. gr. ſi duo corpora oſcillentur unum in circulari arcu DR *fig.* 38., alterum in cy-

cycloidali FR, æquales erunt velocitates in locis O, & N, & tempora deſcenſuum per arcus Oo, Nn erunt ut arcus ipſi. Eſt vero $Oo = \frac{BO.Cc}{CO}$, & $NQ = \frac{RM.Cc}{CR} = \frac{PR.Cc}{RM}$. Itaque tempus deſcenſus per Oo erit ad tempus deſcenſus per NQ, ut $BO.RM:PR.CO$, ſive ut $2RM:CO$, & cum ſit $RM = \sqrt{CR.PR}$, $RO = 2.\sqrt{CR.PR}$, erit tempus deſcenſus in circulo ad tempus deſcenſus in cycloide ut chorda arcus circularis RO ad ejus ſinum CO. Quia demum imminuto arcu in infinitum ratio chordæ, & ſinus evadit ratio æqualitatis, oſcillationes etiam in minimis circuli arcubus erunt æquidiuturnæ. Male non nulli oſcillationum æquidiurnitatem ex æquipollentia chordæ, & arcus deduxerunt: neque enim eadem chordæ, & arcus poſitio eſt. Inſuper ſi eodem tempore in chorda, & arcu corpora deſcenderent, tempus dimidiæ oſcillationis in arcu minimo æquaretur tempori deſcenſus per totam diametrum, quod ex iis omnibus, quæ diximus, falſum colligitur.

PROBLEMA DUODECIMUM.

Invenire curvam, quæ plures ſimul proprietates maximi, aut minimi complectatur.

RESOLUTIO.

Si plures ſimul maximorum, minimorumque, & iſoperimetricorum conditiones requirantur, plura curvæ elementa conſiderari debent: ut quoniam bina elementa ſingulis proprietatibus ſingillatim exhibendis ſufficiunt, binis ſimul componendis terna, & plura pluribus inſerviant. Id vero ſimili fere artificio præſtabitur ac in antecedente problemate factum ſit. Methodum omnem cum fuſius expoſuerit Eulerus *To. 6. Comment.* Petropolitanæ Academiæ, & in libro de lineis curvis maximi, minimive proprietate gaudentibus, rurſus hoc loco exponere non vacat. Illud dumtaxat modo indicabimus, quod in problematis hiſce ſolvendis uſus am-

pliſſimi eſſe poteſt, ſcilicet ſæpe ſæpius pari facilitate problemata tractari omnia, eademque omnino methodo ex curvis omnibus, quæ proprietates A, B, C, D &c æque habeant, curvas illas decerpi, quæ proprietates alias F, G, H &c maximo gradu, aut minimo præſeferant, quæcumque ſit proprietatum propoſitarum complexio, & numerus. Si enim ſingulæ proprietates exhibendæ eſſent ſingillatim, ipſa problematis antecedentis methodo eruerentur æquationis totidem hujus formæ $(X-X+dX).TP=o$, $(Y-Y+dY).TP=o$, $(Z-Z+dZ).TP=o$ &c. Quoniam igitur proprietates omnes in una ſimul curva eſſe debent, compoſitis æquationibus prodibit $dX+dY+dZ$ &c $=o$, aut, ſi homogenei inter ſe termini reddendi ſint, $dX+a\,dY+b^2\,dZ$ &c $=o$, ac denique ad fluentes veniendo erit $X+aY+b^2Z$ &c $=C$. Q. E. I.

Exempli loco problemata illa proponamus, quæ Eulerus in Commentariis Petropolitanæ Academiæ ob proprietatum Iſoperimetricarum complexionem difficiliora eſſe cenſuit, & quibus propterea ſolvendis terna, & quaterna elementa curvæ adhibere voluit. Quæratur primo curva HTE, quæ inter omnes Iſoperimetricas maximam aream AHE complectatur, *fig.* 39. Ob eumdem curvæ ambitum erit $GT+TF=GP+PF=GT-To+TF+PO$, & ſi ſola prior conditio ſervanda eſſet, inde erueretur $\frac{NT.TP}{TF}\frac{MG.TP}{GT}=d.\frac{MG}{GT}TP=o$. Erit etiam ob maximam ſuperficiem curva comprehenſam $AB.MG+AC.NT=AB.\overline{MG-TP}+AC.\overline{NT+TP}$. Quare duabus ſimul conditionibus compoſitis, & facta $AB=x$, $BC=CD=dx$, $BG=y$, $MG=-dy$, $HG=s$, $GT=ds$, curva quæſita definietur æquatione $\frac{a\,dy}{ds}=x\pm b$: quæ ſemper erit æquatio ad circulum. Si inter omnes Iſoperimetricas quæratur curva, quæ circa axem AH converſa gignet maximum ſolidum, inſtituto ut antea calculo ob novam hanc maximi ſolidi proprietatem eſſe oportebit $d.AB^2.TP=o$. Quare rurſus compoſitis conditionibus ejuſdem perimetri, & maximæ ſoliditatis prodibit æquatio $a^2\,dy$

$=x^2$

$= x^2\,ds \pm b^2\,ds$, qua etiam curvæ elaſticæ natura exprimitur. Si curva HTE ea eſſe debeat, ut inter omnes alias per puncta H, E tranſeuntes circa axem AH converſa maximum ſolidum, & minimam ſuperficiem ſimul gignat, ob minimam ſuperficiem eruetur $AB.GT + AC.TF = AB.\overline{GT-TO} + AC.\overline{TF+PO}$, adeoque erit $d.\overline{\frac{AB.MG}{GT}}.TP = o$. Pariter ob maximam ſoliditatem erit adhuc $d.AB^2.TP = o$. Fiet igitur curvæ quæſitæ æquatio $ax\,dy = x^2\,ds \pm b^2\,ds$, quæ in æquationem ad circulum degenerabit ſi ſit $b = o$, ad catenariam vero ſi ſit a quidem infinita, & $b^2 = ac$. Generatim enim ſi ex curvis omnibus Iſoperimetricis quæratur, illa, quam ſuſpenſæ catenæ referunt, in qua ſcilicet centrum gravitatis maxime diſtat ab axe AH, ſive in qua maxima eſt quantitas $.AB.GT$, ſervatis proprietatibus ſingulis prodibit $a\,dy + x\,dy = b\,ds$: & ſi ſola catenaria inquiratur, erit $x\,dy = b\,ds$.

Componamus etiam conditiones plures inter ſe, & inquiramus curvam, quæ ex omnibus Iſoperimetricis maximam aream complectatur, & ſua circa axem AH revolutione gignat maximum ſolidum. Illico habebimus $x^2\,ds + bx\,ds - a^2\,dy = c^2\,ds$. Quod ſi ex curvis omnibus ejuſdem longitudinis, ejuſdemque areæ ea excerpenda ſit, in cujus perimetro grave corpus celerrime deſcendat erit $x\,ds - a\,dy - \frac{b\,dy}{\sqrt{x}} = c\,ds$. Pariter ſi ex curvis omnibus ejuſdem areæ requiratur illa, quæ circa axem AH converſa gignat maximum ſolidum, quod tale inſuper ſit, ut motum ſecundum axis directionem patiatur minimam reſiſtentiam; quia vis tota fluidi ſub cylindrico annulo contenti eſt ut quantitas fluidi, ſive ut $AB.BC$, hæc vero ad vim impreſſam perpendiculariter rectæ GT ſe habet ut $GT;MT$, & hæc rurſus ad vim impreſſam ſecundum directionem axis ut $GT:MT$, ad conditionem minimæ reſiſtentiæ tuendam oportebit ut ſit $\frac{AB.BC^3}{GT^2} + \frac{AC.CD^3}{TF^2} = \frac{AB.BC^3}{\overline{GT-To}^2} + \frac{AC.CD^3}{\overline{TF+PO}^2}$. Inde vero eruetur $d.\frac{x\,dy\,dx^3}{ds^4}.TP = o$: adeoque retentis ſingulis conditionibus hujus problematis erit

ax

$ax + bx^2 - \frac{x\,dy\,dx^3}{ds^4} = c^2$. Si summa omnium $AB.GT$ major esse debeat, quam in curvis aliis omnibus ejusdem areæ, & longitudinis, fiet $ax + bx^2 = \frac{x\,dy}{ds} = c^2$. Conveniunt singulæ æquationes hujusmodi cum iis, quas Eulerus citato in loco tria, & quatuor curvæ elementa considerando exhibuit. Videatur etiam ut Mac-Laurinus *lib.* 2. de Fluxionibus *cap.* 5. §. 931. & *sequ.* problemata isoperimetrica breviter docuit resolvere methodo, quæ huic nostræ maxime affinis est.

Addamus exemplis superioribus alia quædam. Decrescat vis, qua se attrahunt puncta omnia in ratione duplicata crescentium distantiarum, & requiratur curva QHE, *fig.* 40., quæ maxime omnium attrahat corpusculum L in axe HL constitutum. Erit attractio elementorum GT, FT secundum directionem axis ipsius exercita $\frac{GT.LR}{GL^3} + \frac{TF.LS}{TL^3} = \frac{\overline{GT - To}}{GL^3}$. $LR + \frac{\overline{TF + PO}}{TL^3}.LS$, & inde eruetur $d.\frac{LR.MG}{GL^3.GT}.TP = d.\frac{\overline{n\,dy + y\,dy}.}{\left(\overline{n + y}^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}.ds}TP = o$, facta scilicet $LA = n$. Si vero quæratur curva, quæ non ipsa quidem, sed superficies revolutione circa axem genita attractionem maximam exerceat, erit $d.\frac{\overline{nx\,dy + xy\,dy}.}{\left(\overline{n + y}^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}.ds}TP = o$. Si denique totum solidum attractionem maximam exercere debeat, quoniam, ut a Newtono demonstratum est, attractio circuli radio RG descripti est $1 - \frac{LR}{LG}$, erunt elementa attractionis maximæ $MG - \frac{MG.LR}{LG} + NT - \frac{NT.LS}{LT} = MG - TP - \frac{\overline{MG - TP}}{LG}.LR + NT + TP - \frac{\overline{NT + TP}}{LT}.LS$: unde eruetur $\frac{d.\overline{n + y}.}{\left(\overline{n + y}^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}TP = o$. Poterunt hæ proprietates cum aliis quibuscumque ad libitum componi. Ex. gr. si curva illius indolis esse debeat, ut circa axem

LH

LH conversa solidum gignat, quod præ aliis æqualibus maxima attractione polleat, erit $\frac{b^2 u + b^2 y}{(\overline{u+y}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = c^2 - x^2$.

SCHOLION.

Ut simul elementa omnia invenire possent Tyrones, quæ ad curvarum theoriam pertinent, nonnulla oporteret addere de dimensione arearum, curvarumque, & superficierum, ac solidorum revolutione earumdem curvarum circa axem aliquem genitorum. Verum quadraturarum, & rectificationum methodus ab aliis passim authoribus ad eum brevitatis apicem deducta est, ut nihil hacce in re amplius desiderari posse videatur. Nihil etiam hic novi superest, quod addi debeat, nisi quod respicit dimensionem corporum sic genitorum revolutione alicujus figuræ planæ circa axem, ut interim planum generans secundum axis longitudinem moveatur. Solida hujusmodi primus omnium considerare cæpit Torricellius in appendice problematis secundi de Solido Hyperbolico, & Cochleas, sive solida Cochlearia appellavit. Genesim sic descripsit. Consideravit duas figuras planas in eodem semper plano consistere, eodemque tempore moveri, rectangulum nempe motu circulari æquabili circa unum latus veluti circa axem, figuram vero aliam quamcumque motu progressivo secundum longitudinem oppositi alterius lateris. Soliditatem Cochleæ, & gravitatis centrum invenit Torricellius. Occasione quarumdam disputationum aliquot ab hinc annis in Academia nostra excitatarum nonnulla inventis Torricellianis addita sunt. Exponemus breviter summa capita postremæ hujus tractationis, quæ Curvarum theoriam respicit.

In primis quia per Corollarium tertium primi Theorematis curvæ *FC*, *fig.* 19., fluxio *Cc* est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; si ex data curvæ æquatione, juxta quartum, & quintum Theorema, eruatur valor fluxionis dx, aut dy, tota etiam fluxio $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ unica variabili exprimi poterit: tum si juxta scholium primæ partis ad fluentem veniatur, habebitur cur-

væ

væ propofitæ longitudo. Sit æquatio curvæ $x^2 = y^3$, fcilicet proponatur Parabola fecundi ordinis, & parametri $= 1$. Erit $dx = \frac{3}{2}\, y^{\frac{1}{2}}\, dy$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{2}\, dy \sqrt{(9y+4)}$. Jam vero $\frac{1}{2}\, dy$ eft ipfa fluxio quantitatis $\frac{1}{18}\,(9y+4)$. Erit igitur tota fluens $= \frac{\frac{1}{18}(9y+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{27}\,(9y+4)^{\frac{3}{2}} + C$. Quia vero incipientibus femiordinatis, & facta $y = o$, tota etiam perimeter debet effe $= o$, fiet $\frac{1}{27} . 4^{\frac{3}{2}} + C = o$, & inde eruetur $C = -\frac{8}{27}$, & longitudo totius perimetri Parabolici evadet $= \frac{1}{27}\,(9y+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$. Eodem modo fi femiaxis major Hyperbolæ, aut Ellipfis fit $= a$, minor $= c$, & abfciffæ x a centro fupputentur, erit elementum arcus Hyperbolici $= -\frac{dx\sqrt{(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 + x^2)}}$, Elliptici $= -\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, circularis $= -\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, aut fi radius circuli vocetur 1, erit peripheriæ circularis elementum $= -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

Fluxiones hujus generis non alia ratione ad fluentes reduci poffunt nifi ope ferierum infinitarum. Scilicet in infinitas feries evolvendæ funt radicales quantitates, deinde fingulorum terminorum fluens eft accipienda. Fluens tamen circularis arcus imaginariis quantitatibus poteft exprimi. Sit arcus ipfe $= s$, erit $ds = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(x^2-1)}} = -\frac{dx\,(\sqrt{(x^2-1)} + x)}{\sqrt{-1}.\sqrt{(x^2-1)}.(\sqrt{(x^2-1)} + x)} = \frac{-dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)}}}{\sqrt{-1}.(x + \sqrt{(x^2-1)})}$.

Jam vero fractionis hujus numerator eft ipfa fluxio denominatoris per $\sqrt{-1}$ divifa Itaque fi logarithmorum modulus fit

$= 1$

$= 1$, erit $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \, log. \, (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$: quæ fluens completa eſt, quoniam in ipſa ſemiordinatarum origine, poſita ſcilicet $x = 1$, eſt etiam $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \, log. \, 1 = o$. Si fiat $x = o$, circularis arcus evadet quadrans, & fiet $s = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \, log. \, \sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}} . \, \frac{1}{2} \, log. - 1$, adeoque erit diameter ad peripheriam ut $\sqrt{-1} : log. - 1$.

Si c vocetur quantitas illa, cujus logarithmus æqualis eſt unitati, juxta logarithmorum regulas prodibit $s . \sqrt{-1} . \, log. \, c = log. \, (x + \sqrt{(x^2 - 1)})$, & $c^{s\sqrt{-1}} = x + \sqrt{(x^2 - 1)}$. Inde etiam valor ſinus, & coſinus erui poterit. Erit enim

$$c^{s\sqrt{-1}} - x = \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$c^{2s\sqrt{-1}} - 2 \, x \, c^{s\sqrt{-1}} + x^2 = x^2 - 1$$

$$c^{2s\sqrt{-1}} + 1 = 2 \, x \, c^{s\sqrt{-1}}$$

$$\frac{1}{2} \, c^{s\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \, c^{-s\sqrt{-1}} = x$$

$$\frac{c^{2s\sqrt{-1}} + 2 + c^{-2s\sqrt{-1}}}{4} = x^2$$

$$\frac{c^{2s\sqrt{-1}} - 2 + c^{-2s\sqrt{-1}}}{4} = x^2 - 1$$

$$\frac{c^{s\sqrt{-1}} - c^{-s\sqrt{-1}}}{2} = \sqrt{(x^2 - 1)}$$

$$\frac{c^{s\sqrt{-1}} - c^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{(1 - x^2)} = y.$$

Numerus ille cujus logarithmus æqualis eſt unitati facili ratione inveſtigabitur. Facile enim oſtendi poteſt eſſe $c^x = 1 + x \; \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{x^4}{1 . 2 . 3 . 4}$ &c. Nam ſi fiat $c^x = y$, & fluxiones æqualium fluentium accipiantur, erit $dy = dx +$

$x\,dx + \frac{x^2\,dx}{1.2} + \frac{x^3\,dx}{1.2.3}$ &c $= dx(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c $) =$ $y\,dx$. Inde vero eruetur $\frac{dy}{y} = d\,x$, $log.\,y = x$, ac denique $y = c^x$. Quod si igitur in priore serie $c^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c fiat $x = 1$, prodibit $c = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$ &c. Alia rectificationum methodi exempla sibi ipsi comparare poterit Tyro, aut ex aliis authoribus decerpere, qui solent exemplis hujus generis abundare.

Pariter cum juxta Corollarium primum Theorematis secundi areæ FCB fluxio sit $= y\,dx$, ex æquatione curvæ fluxionis ipsius valor deduci poterit, qui unica variabili exprimatur, iisdemque regulis tota curvæ area comparabitur: Ex. gr. in parabola Apolloniana cum sit $y = \sqrt{a\,x}$, erit $y\,d\,x = a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$, & fluente accepta erit tota area parabolica $= \frac{2}{3}\,a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$, æqualis scilicet duabus tertiis partibus rectanguli ex semiordinata in abscissam. Similiter quoniam abscissis a vertice supputatis, & posito axe majore $= 2\,a$, parametro $= p$, est pro hyperbola quidem $y = \sqrt{\left(\frac{2apx + px^2}{2a}\right)}$, pro ellipsi vero $y = \sqrt{\left(\frac{2apx - px^2}{2a}\right)}$, erit elementum areæ hyperbolicæ $= dx\sqrt{\left(\frac{2apx + px^2}{2a}\right)}$, ellipticæ $= d\,x\sqrt{\left(\frac{2apx - px^2}{2a}\right)}$, circularis $= dx\sqrt{(2\,a\,x - x^2)}$.

Si solidum revolutione figuræ planæ $F\,C\,B$ circa axem FB gignatur, superficiei fluxio erit ipsa fluxio curvæ $C\,c$, ducta in totam circularis sectionis axi perpendicularis peripheriam, scilicet posito radio ad peripheriam ut $r : c$, erit fluxio superficiei $= \frac{cy}{r}.\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}$. Insuper cum sectio axi perpendicularis sit circulus, solidum etiam intelligi poterit genitum ex fluxu circuli, qui perpendiculariter eidem re-

rectæ feratur ſemper motu ſibi ipſi parallello, & cujus radius augeatur, vel imminuatur. Erit igitur fluxio ſolidi æqualis facto ex area fluentis circuli in fluxionem axis, ſcilicet $= \frac{cy^2 dx}{2r}$. Ita in ſphæroide elliptico cum ſit $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$,

erit ſoliditatis elementum $= \frac{cpx dx}{2r} - \frac{cpx^2 dx}{4ra}$, & ſoliditas ſegmenti indeterminatæ altitudinis erit $= \frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpx^3}{12ra}$, & ſphæroidis totius ſoliditas $= \frac{cpa^2}{3r}$.

Quod ſi etiam totum ſolidum non circuli hujus fluxu, ſed revolutione figuræ planæ FCB circa axem FB, ut antea, genitum intelligatur, eadem ſoliditatis formula habebitur. Eſſet enim conoidis ita deſcripti fluxio annulus ſolidus, qui gigneretur revolutione fluxionis CM areæ FCB circa axem ipſum. Quinimo ſi dum planum FCB revolvitur, motu quocumque æquabili, vel inæquabili ſecundum longitudinem axis AB feratur dextrorſum, vel ſiniſtrorſum, ſolidum inde genitum eadem ſemper ratione metiendum erit: ſcilicet cochleare ſolidum æquabitur ſemper conoidi, quod ſolo circulari motu ejuſdem plani circa axem deſcribi poſſet. Nam ſi planum quodcumque per axem ipſum traducatur, eadem erit ſectio in conoidali, & cochleari ſolido relicta, & æquabitur plano generati. Perinde etiam erit ſi planum generans dato intervallo quolibet ab axe diſtet, & ſemper cylindrum tangat, aut ſi inſuper tertium habeat motum, quo axi accedat, vel recedat. Dato enim angulo circa ipſum axem deſcripto, cochleæ ſoliditas æqualis erit alteri ſolido, quod iiſdem motibus acceſſus, receſſuſque ab axe gigneretur, poſito quod planum generans nullum alium habeat motum, quo ſecundum axis longitudinem feratur.

Ad ſuperficiem cochleæ quod pertinet, fiat ſemiordinata $BC = y$, tangens $AC = t$. Vocetur inſuper a diſtantia puncti alicujus ab axe, quod rotationis velocitatem æqualem habeat communi velocitati progreſſionis totius curvæ FCB ſecundum longitudinem axis AB. Sit denique dz elementum

arcus, quod a puncto ipso circa axem circulari motu describetur. Dico quod elementum cochlearis superficiei circulari motu ipsius curvæ, & progressivo æquabili genitæ erit $= \frac{dz}{a} . \surd (a^2 + t^2) . dy$, ac propterea pendebit ex rectificatione circuli, atque ex alia quantitate, quæ pro varia proportione circularis motus, & progressivi aliquando finitis terminis exhiberi poterit, aliquando autem involvet rectificationem hyperbolæ, aut ellipseos, aut curvæ alterius. Simplicissimus omnium casus est, in quo planum generans sit triangulum. Tunc enim cum tangens t sit semiordinatæ y proportionalis, superficies solidi cochlearis pendebit ex rectificatione circuli simul, & Parabolæ Apollonianæ. Si plani generantis distantia ab axe non maneat constanter eadem, sed augeatur in ratione quantitatis variabilis cujuscumque x, erit elementum cochlearis superficiei $= \frac{dz}{a} . \surd (y^2 t^2 + a^2 y^2 \pm 2at \, yx + x^2 t^2) . \frac{dy}{y}$, & si quantitas eadem x sit semiordinatæ y proportionalis fiet quæsitum elementum $= \frac{dz}{a} . \surd (2t^2 + 2at + a^2) \, dy$.

ME-

PAULLI FRISII
MEDITATIONES QUÆDAM
METAPHYSICÆ.

MEDITATIONES METAPHYSICÆ.

CUm ſuperioribus annis Metaphiſicæ, atque Ethicæ inſtitutiones publice traderem, ſingillatim eam partem conſiderare, atque explicare volui, quam Theologiam naturalem vocant, & quæ primæ, ac ſupremæ cauſſæ notionem reſpicit. Graviſſimum proculdubio argumentum, & in quo immorari Philoſophum ætate hac noſtra potiſſimum, atque his temporibus plane decet, in quibus non ſine magna veritatis, ac morum labe cavillationes, ac dubia quædam proſeminant nonnulli, qui ens illud primum, ac ſummum, quo aliud melius nec eſſe, nec etiam percipi a nobis poteſt, cum extenſione ac materia confundere auſi ſunt. Quid vero? Plane is cæcutiat neceſſe eſt, qui hanc omnem cæleſtium corporum, ac terreſtrium varietatem, pulchritudinem, ordinem circumſpiciens, ſeſe minime adduci ſentiat ut ex tantis viciſſitudinibus, ac motionibus tam multarum rerum, atque tantarum aſſurgat ad mentem quamdam ſupremam, ac perfectiſſimam, quæ præ ſit, quæ imperet, & cui pareatur. Conſentiebant hacce in re veteres Philoſophi fere omnes: ut enim præclare eſt a Clemente Alexandrino primum, tum rurſus a Cudwortho obſervatum, plures a Græcis Athei perperam vocati ſunt, quod ſine immenſo cæremoniarum Gentilium apparatu unicam primam cauſſam venerantes popularia numina aſpernarentur, Evehemerus ex. gr. quod Deorum Græciæ ſepulchra, atque ortum indicaverit, Anaxagoras quod Mundum a mente perfe-

fectissima fabricatum docens Solem ex Deorum canone abraserit, atque ita Socrates, Protagoras, Aristoteles. Cicero *lib.* 1. *Tuscul. Quæst.* præclarum illud scriptum reliquit: *Nec vero Deus ipse, qui intelligitur a nobis, alio modo intelligi potest, nisi mens soluta quædam, & libera, segregata ab omni concretione mortali, omnia sentiens, & movens, ipsaque prædita motu sempiterno.*

Hæc etiam apud veteres nationes omnes latissime sententia obtinuit, ut colligitur ex eodem Tullio *lib.* 1. *de Nat. Deor.*, Platone *lib.* 10. de legibus, Aristotele de Cælo *lib.* 1. *cap.* 3, Diodoro Siculo *lib.* 12., Seneca *epist.* 117., Sexto Empirico *lib.* 8., Dione Chrisostomo *Orat.* 12. &c. Nunc autem si quæ nationes videri possunt nullam supremæ, & necessariæ caussæ notionem præseferre, eæ nec tot sunt quot ab aliis fuit jactitatum, & cum bardæ prorsus, ac stupidæ vim fere cogitandi omnem educationis barbaræ vitio amiserit, potius ad Deum minime sese convertere quam ignorare Deum censendæ sunt. Cafros, atque Huttentotos, quos primi viatores religionis omnis extorres esse evulgaverant, supremam caussam agnoscere, longiore illorum hominum societate, & domicilio didicit Andreas Kolbi. Siamenses, quos Johannes Lockius Loubcrii authoritate Atheis recensuit, a Sinensibus religionem habuisse acceptam, & religionis vestigia habere undique, itinerariis omnibus, atque itineratoribus docemur. Brasilienses sylvestres ab Atheismi nota, quam illis Lockius inusserat, satis vindicat in suo Dictionario Martinierius. Paraquariis nullam primæ, & supremæ caussæ cognitionem affulgere minus recte Nicolaus Del Techo ex eo deduxit, quod nullum Deo indicando, invocandoque habeant aptum vocabulum. Virginienses enim, ut adnotat Lambertus, præter Solem quoddam idolum colunt, Kiwasa nomine, quod consulunt, & cui templa, & sacerdotes, & festa instituunt. Habent igitur manifesta religionis alicujus vestigia. Nihilo tamen minus apud eos populos nullum vocabulum inventum esse, quod proprie Deum significet, satis constat ex Virginiana Bibliæ sacræ versione, quam anno 1663 characteribus nostris Cantabrigiæ edidit Johannes Eliot, & in qua,

cæ-

cæteris Americane redditis, Dei vocabulo vocabulum *God* respondet, quod Anglicæ Deum exprimit. Primus versiculus ex. gr. *in principio creavit Deus cælum, & terram*, sic vertitur: *Weske Kutchissik ayum God Kesuk kah Onke*. Bibliæ titulus est: *Mamusse Wvnneetupanatamwe Up Biblum God Naneeswe Nukkone testament kan Wonk Wusku testament*.

Quid vero hacce in re pluribus opus est? Licet enim efferati essent homines, aut barbaræ aliquot nationes sine religione penitus, & sine Deo; sane paucorum feritas, & ignorantia cæterorum authoritati officere nequaquam posset, & in tanta ætatum omnium, & cultiorum gentium consensione locum adhuc, ac vim haberet argumentum illud, quod ad probandam Dei existentiam in medium olim attulerunt Plato, Aristoteles, Tullius, Seneca, Plutarchus, & rursus proposuerunt Cudworthus, Benoestius, & Genuensis. Quod licet argumentum nonnulli infringere, & Bælius maxime conatus sit, jure merito tamen Genuensi in appendice ad *cap.* 1. *lib.* 3. Elementorum Metaphysicæ adhuc gravissimum visum est. Sive enim censeamus, ut ait ipse, ex uno communi fonte eam doctrinam derivatam esse, videlicet a primo quodam humani generis progenitore, & certissimo argumento est aliquando cæpisse, & originem habere hunc mundum, quod nonnisi ab aliqua sapientissima, potentissimaque caussa esse potest: sive dicamus depromptam fuisse ex rerum adspectabilium contemplatione, & eodem argumento conficitur Deum existere: quod enim evidens, quod perspicuum videtur omnibus non potest non esse verum. Huc pertinet illud Senecæ: *nemo omnes, omnes neminem, singuli singulos fallunt*.

Ut modo ab argumentis hisce moralibus, ut vocant ad Metaphysicas etiam, ac Physicas rationes procedamus, primo exordiendum est a conceptu entis æterni, & necessarii. Primo autem ex receptissimo illo axiomate, *nihil est sine ratione sufficienti cur potius sit quam non sit*, aliud manifeste videtur consequi: *si semel nihil fuit, semper nihil esse debuit*. Nam si semel nihil fuit, nulla etiam fuit semel sufficiens ratio, qua res aliqua existeret: adeoque nihil amplius esse potuit.

tuit. Ex hoc vero eruitur alterum, quod ut femel aliquid fit, nunquam nihil eſſe debuit, & aliquod debuit ſemper eſſe: hoc eſt quod *ſi ſemel aliquid eſt, debet eſſe aliquod æternum*. Ut tertium demonſtremus, quod *ſi aliquod æternum eſt, debet eſſe ens aliquod æternum, & a ſe*, ſeries aſcendentes rerum vocabimus, quæ in datum terminum deſinunt dato tempore; ut eſt ſeries dati hominis ex. gr., patris, avi, atavi, &c: & ſeries deſcendentes, quæ ex dato termino incipiunt dato tempore, ut eſt ſeries dati hominis, filii &c: denique ſeries infinitas aut aſcendentes, aut deſcendentes, in quibus numerus terminorum numerum datum quemcumque ſuperat. Ex quibus definitionibus præſto eſt in ſerie deſcendente infinita nullum eſſe terminum ultimum: quicumque enim terminorum numerus aſſignetur, ſemper numerus major aſſignari poterit, quin ullus unquam terminorum aſſignandorum finis, ac limes ſit. Jam vero ſeries aſcendens infinita nihil eſt aliud quam infinita ſeries deſcendens contrarie ſumpta, ut qui in deſcendente eſt primus terminus ſit ultimus in aſcendente, qui in deſcendente ſecundus eſt in aſcendente ſit penultimus, atque ita termini omnes inverſo ordine ſibi invicem reſpondeant. Itaque ſi in infinita ſerie deſcendente terminus ultimus nullus eſt, *nullus etiam eſt primus terminus in ſerie alia aſcendente infinita*: & ſi ſeries cauſſarum ſit, hoc eſt ſi unus terminus ſit cauſſa, & ſufficiens ratio termini alterius, non amplius licebit in infinitum aſcendendo excurrere. Nullum enim habebit primum terminum, & ſublato primo termino nullus eſſe poterit ſecundus, tertius, quartus &c, & tota ſeries a primo termino infinite diſſito incipiens evadet penitus impoſſibilis.

His poſitis ad inſtitutum noſtrum redeamus. Si aliquod æternum debet eſſe, ut jam diximus, aut aliquod ens æternum a ſe eſt, aut ens unum ab alio pendet, & hoc ab alio rurſus, atque alio in infinitum. Verum, ut modo oſtendimus, *nulla eſſe poteſt aſcendens cauſſarum ſeries, quæ abeat in infinitum*. Itaque ſi aliquod æternum eſt, *eſt aliquod ens æternum, & a ſe*. Ex hoc theoremate tria alia manifeſtiſſime conſequuntur. Primo ens æternum in ſe ipſo complecti

de-

debet sufficientem rationem sui ipsius, & rerum aliarum omnium, quæ sunt, quæ fuerunt, aut possunt esse: sive debet esse *summe providum*, & *omnipotens*. Deinde debet esse etiam *necessarium*. Nam si quod æternum, & a se est non est etiam necessarium, potuit non esse. Sed si ens æternum non fuisset, nec ipsum ens nec ens aliud potuisset esse. Ergo si potuit non esse ens æternum, potuit non esse quidquid est. Rursus quod est nunquam potuit esse impossibile, ut patet. Ergo ens æternum, & a se, debet esse etiam necessarium. Tertio quod a se est, ab alio non pendet, & quod necessitate suæ naturæ est, totam naturam suam in se habet. Ergo ab aliis rebus exterioribus nullo modo modo affici potest: sive extra se nullam habere potest caussam mutationis. Immutabilitas insuper videtur consequi ex conceptu ipso entis necessarii, & a se: videntur enim duo synonima immutabilitas, & necessitas.

Verum ut accurate ostendamus ens necessarium esse intrinsecus etiam immutabile, observandum est, quod si ens æternum, & necessarium in diversos actus transeundo intrinsecus mutaretur; actus unus sufficientem rationem complecteretur actus alterius subsequentis. Ut enim nihil fit sine aliqua ratione sufficiente, necesse est ut dum actum priorem habet ens æternum, habeat etiam sufficientem rationem subsequentis actus. Jam vero hujusmodi ratio extra ens æternum esse nequit, extra quod nulla est sufficiens ratio, ut jam vidimus. Intra autem nihil est aliud præter ipsum necessariæ, & æternæ naturæ actum. Oportet igitur ut actus ipse rationem sufficientem alterius actus complectatur. Hoc semel, atque alio rursus principio posito, quod nulla esse possit infinita ascendens caussarum quarumcumque, & sufficientum rationum series; præsto est quod si ens æternum, & necessarium actus quoscumque diversos habuit, infinitos diversos actus habere non potuit: sive, quod eodem recidit, ens æternum, & necessarium infinito tempore intrinsecus immutabiliter permansisse. Porro si ens æternum, & necessarium infinito tempore sine mutatione aliqua extitit, nullo unquam tempore mutari potuit. Nam si non ab æterno quidem, sed

dato tempore prima mutatio facta esset, in ipso antecedente, & infinitæ durationis actu ratio aliqua fuisset totius mutationis. Sed qui infinito tempore nullam rationem mutationis in se ipso complexus esset, idem immutabiliter permanendo nullam unquam mutationis rationem potuisset in se complecti. Itaque nullo unquam tempore mutari potuit ens æternum: sive est ***extrinsecus, & intrinsecus immutabilis***.

Cætera, quæ proprietates primi ejusdem entis respiciunt, ex superioribus theorematis corollariorum more deduci poterunt. Si etenim neque intrinsecus, neque extrinsecus ens æternum mutari potest; non nisi unicus in ente ipso esse potest actus æternus, & necessarius: hoc est unico eodem actu, & nullo temporis aut præteriti, aut præsentis discrimine debet velle, intelligere, agere, complecti omnia. Et quia quod materiale est divisionem partium, diversamque dispositionem, atque ordinem continue suscipit; ens immutabile, unicum, simplicissimum, debet esse insuper immateriale, distinctumque ab Universo. Id vero ex æternitate etiam ipsius entis poterat antea colligi. Conciliari enim nequit æternitas, ac necessitas cum successivis modificationibus materiæ, ut perspicue explicavit Poliniacus ***lib.*** 3. Anti-Lucretii. Rursus si æterna dici nequit mens hominis, nulla potior ratio est, qua materiam, rem ignobiliorem, minusque necessariam, velimus esse æternam: quod argumentum nitide exposuit Lockius ***lib.*** 4. de intellectu humano ***cap.*** 10. Quæ vero adversus creationem materiæ inde argumenta deprompta sunt, quod nequeamus intellectu assequi quomodo materies, quæ non erat aliquando, aliquando esse cæperit, omnia illo unico axiomate refelluntur, quod in humanis quoque, ac naturalibus rebus habere locum in conversione Comitis Rochæ ostendit Episcopus Salisburiensis: quod scilicet minime idcirco inficiari debeat res aliqua quod nequeamus intelligere quomodo sit. Quis enim ex. gr. percipiet, quod tot observationibus constat, particulam materiæ quamcumque minimam alias omnes ubicumque positas trahere vi quæ decrescat in ratione duplicata crescentium distantiarum?

Qui

Qui æternitatem materiæ, & Mundi ſuadere authores argumento aliquo conati ſunt, plane ineptiverunt. Ariſtoteles cum a Deo Mundum conditum fuiſſe crederet, ab æterno fuiſſe conditum duodecim argumentis probare voluit, quæ magno quidem molimine ex antiquis Peripateticæ ſcholæ principiis refutare Benedictus Pererius aggreſſus eſt, minime tamen cæteros tangunt, qui non tenentur ſacramento Ariſtotelis, nec ſibi effata illa deglutiunt: *materiam ingenerabilem eſſe, atque incorruptibilem: generationem ſine motu fieri non poſſe: ingenerabiles, incorruptibileſque eſſe cælos.* Ejuſdem furfuris ſunt duodecim argumenta, quæ Averroes Ariſtotelicis adjecerat, & viginti alia, quæ ex Proclo retulit Philoponus. Singula poſt Pererium Genuenſis *Elem. Met. par.* 3. mera ſophiſmata, & pueriles captiunculas eſſe oſtendit. Nos ab iis recenſendis ſuperſedemus non ſolum quia minoris ponderis cenſemus eſſe, ſed etiam quia recentiores Materialiſtæ de levitate ſingulorum convenientes nobiſcum, æternitatem Mundi, & materiæ ſuadere aliunde aggreſſi ſunt, ex Hiſtoria naturali, Chronologia veteri, Aſtronomicis obſervationibus. Eamdem ob cauſſam non memoramus argumenta alia decem Lucretii Cari, quibus creationem materiæ ex nihilo ſic impugnavit, ut Poetis potius quam Philoſophis ſatisfecerit. Quid enim eſt quod tanto verborum apparatu objicit, ex ſpecificis ſuis ſeminibus oriri plantas, agros fertiliores reddi agricolarum induſtria, ex aliquo, quod antea extiterat, emergere omnia? Aliud plane eſt quod data exiſtentia materiæ ex materia fiant omnia, & aliud quod ex nihilo materies eadem non ſit facta: quod quidem non Poetice inſinuandum incumbebat Lucretio, ſed Philoſophice demonſtrandum.

Porro ſi mundum hunc adſpectabilem conſideremus, nihil inveniemus omnino, quod materiam increatam, improductam, æternam, aut vetuſtiorem quoque, quam receptiſſimæ traditiones ferant eſſe indicet: non artefactas moles, non perfectionem, atque amplitudinem ſcientiarum, non naturales alias productiones. Solent utique afferri in medium Chriſtallus Viennenſis, Chriſtallus montana, chriſtalliſationes, petri-

tri-

trificationesque nonnullæ aliæ, quarum cum massæ alicubi ingentes reperiantur, exiguum frustulum naturaliter efformari non nisi pluribus annis potest. At vero his etiam omnibus concessis pudet me idiotarum quorumdam, qui productionibus naturalibus regulam auream aptantes, ex quo decem annorum tempore ex. gr. primus christalli digitus coalescat, centum annis opus esse inferunt ut decem digiti absolvantur. Hæc supputandi ratio, quantum ovum ovo esse potest, alteri affinis est, qua cum una aquæ uncia ex. gr. decem minutis temporis ex aperto vasis foramine elabatur, deducat aliquis minutis centum esse opus ut decem unciæ elabi possint.

Solent etiam opponi portentosæ illæ Chaldæorum, Ægiptiorum, Sinensium chronologiæ. Fama est Chaldæos Alexandri Magni temporibus observationes Astronomicas jactitasse 473000 annis ante institutas: quamvis Porphirius, & Berosus, qui Antiochi sæculo vixerunt, nullas annis 1903 vetustiores memoraverint. Ægiptii tres Dynastarum series recensebant, Deorum, Heroum, Regum, quibus imperium annis 36525 traductum fuisse asserebant ad Nectanebum usque, qui ab Ocho Persarum Rege victus, ac pulsus est ante Alexandri Magni expeditiones. Sinenses denique imperium familiæ Hia demandatum fuisse dicunt plusquam 2000 annis ante Christum: septem alios reges, qui simul plusquam sæculorum septem intervallo imperaverint, priores statuunt: aliosque insuper immanis antiquitatis. At si accurate explores traditionum hujusmodi originem, si quæras quæ eorumdem sæculorum, aut proxime posteriorum saltem monumenta, & scriptores sint tantæ antiquitatis testes, ne unus quidem in medium proferri poterit. Sane Confucius anno ante Christum 551 natus, cum florentissimo imperii tempore, & ante combustionem librorum veterum scripsisset, missis veluti nimium dubiis, quæ sub Dynastis Hia, & Chang acciderant, a familiæ Tcheou imperio exorsus est, anno scilicet 1122 ante Christum. Antiquitatum earumdem fabulas, contradictiones, mendacia satis jam explicarunt Marshamus in Canone, Witsius in Ægiptiacis, & Duhalt in Sinæ descriptio-

ptione, ut mirum ſit Abbatem de Prades Lutetiæ Pariſiorum publice recoxiſſe hanc crambem, & cyclo Sinenſi quodam, ut Belgicarum epiſtolarum author oſtendit, male intellecto, imperii totius epocham longe ante diluvium conſtituiſſe.

Rem autem diremit prorſus Caſſinus, & Deguignes. Ille enim qua erat in rebus Aſtronomicis perſpicacia, & eruditione animadvertit veteres illas Sinenſium eclipſium ſupputationes ex tabulis Tychonicis fuiſſe erutas, dono alicujus Europæi, qui de Sinenſibus antiquitatibus bene mereri voluerit. Hic vero incredibili ſtudio Hiſtoriis Hunnorum omnibus conſideratis, demonſtravit certam Sinenſium Chronologiam non niſi aliquot ſæculis Chriſtianam æram anteceſſiſſe. Supereſt igitur hacce in re, quod pro tuenda originis noſtræ antiquitate addidit Cl. de Voltaire in ſuo ſpecimine Newtonianæ Philoſophiæ, Eclipticam, teſte Herodoto, fuiſſe aliquando Æquatori circulo perpendicularem: obliquitatem Eclipticæ, juxta Louvilleum, uno minuto primo ſingulis ſæculis imminui: adeoque annis 399000 fuiſſe opus ut Ecliptica angulo 66 graduum cum dimidio, ſive minutis 3990 recederet a perpendiculo. Hanc vero difficultatem, ſeu potius ſublimioris Phyſicæ ignorationem præoccupavimus ſupra ubi oſtendimus imminutionem obliquitatis Eclipticæ ex attractione aliorum Planetarum, & potiſſimum Jovis, ac Veneris pendere: una nodorum revolutione reſtitui Eclipticam in gradum priſtinum: & variationis totius differentiam uno gradu majorem eſſe non poſſe.

Sed quoniam a moralibus, & metaphyſicis rationibus ſenſim ad mundi, & corporum naturalium contemplationem dilapſi ſumus, præſtat hoc argumentum, quod phyſicum vocant, exponere ſingillatim, atque altius ex ſuis principiis derivare. Scilicet cum undequaque in natura univerſa non niſi motus, & peculiares vires cæleſtium corporum, ac terreſtrium deprehendamus, corpora omnia novimus eſſe inertia, atque otioſa, & quæ ſi quieverint aliquando, aut ad motum impulſa ſint, quietem, motumve impreſſum tueantur accuratiſſime, donec viribus aliis extrinſecus advenientibus alios motus ſibi comparare neceſſe ſit. Hoc naturalis otioſitatis, &

iner-

inertiæ principium, quod tanto experimentorum, observationumque omnium consensu in universam Astronomiam, Mechanicam, & Physicam induxerat Newtonus, nescio cur e Metaphysica penitus eliminare nonnulli aggressi sint, qui cum motum gravitatemque, & vires alias ex se corpora arbitrabantur, & natura sua præseferre, videbantur etiam asserere nullum esse opus entis alterius necessarii, incorporei, & distincti ab Universo: in quem plane scopulum incauti homines minime prolapsi essent, si notionem, atque ideam corporum diligentius consuluissent. Explicemus per partes singulas hanc notionem.

In primis corpora absolute extensa esse, & enormiter falli Bælium dum extensionem realiter dari negat, & cum relativis aliis, ac sensibilibus proprietatibus corporum confundit, manifestum est. Quæ proprietates nihil aliud sunt in corporibus quam meræ dispositiones ad sensus nostros impellendos, quæ intrinsecus corpora non afficiunt, sed in nobis metipsis fiunt, pendentque a variis organorum motibus, & mentis reflexionibus, relationibusque, color, sapor, odor &c, pro relationum, & motuum eorumdem diversitate differunt inter se. Idem corpus a nobis coloratum, non coloratum a cæco aliquo concipitur: idem calidum uni, frigidum alteri, uni molle, alteri durum videtur. Durities insuper, frigus, calor ejusdem corporis possunt percipi, & non percipi manente adhuc perceptione corporis. Quare si extensio ad genus harum proprietatum, aut relationum potius pertineret; ejusdem corporis extensio aliquando perciperetur, aliquando non, & aliquando extensionis perceptionem proprietatis contrariæ perceptio exciperet, ut perceptionem caloris excipit perceptio frigoris, & corpus, quod durum est, evadit aliquando molle. At vero quænam in corpore proprietas extensioni contraria est, quodnam est corpus, quod sine extensione ulla aliquando possit a nobis percipi?

Utique cum rem aliquam metiri nihil sit aliud quam invenire ipsius rationem ad quantitatem aliam ejusdem generis, quæ assumitur pro unitate; extensionis etiam mensura non nisi relatione exprimi poterit: neque tamen propte-

rea quod de menſura dicitur ad extenſionem totam traduci poterit. Utrumque ſimul confudiſſe Bælius, Nicolius, Malebranchius, Berkelejus, Lamius viſi ſunt. Animadvertit enim Bælius idem corpus, & magnum puero, & adulto homini referenti ad ſe omnia ſatis parvum videri poſſe. Nicolius etiam obſervavit quod ſi oculorum loco lentem aliquam haberemus, quæ corporum magnitudinem augeret, aut imminueret, omnibus data proportione auctis, aut imminutis relatio, & menſura communis extenſionis maneret eadem. Pariter ſi quis eſſet ex infinite parvis iis Mundis, quos Johannes Bernoullius in Commercio epiſtolico propoſuerat, & in quibus Planetæ, & homines, & cæleſtia, ac terreſtria omnia corpora æquali proportione inter ſe invicem compararentur, quæ in Mundo hoc noſtro locum habet; ii plane infinite parvi homunciones ejuſdem magnitudinis res ſuas cenſerent, ac nos noſtras cenſeamus, eaſdem menſurarum haberent ideas. Hæc vero, & alia his ſimilia, quæ alii congerunt, quid demum probant? Ergo ne quia diverſæ extenſionis eadem idea, & diverſa idem haberi poteſt ejuſdem extenſionis, cum relativis aliis, ac ſenſibilibus proprietatibus confundenda erit extenſio? Minime gentium: neque enim proprietates ſenſibiles vere in corporibus non eſſe ſolum ex eo colligimus, quod magis, aut minus poſſint afficere idem corpus, ſed ex eo quod eſſe & non eſſe poſſint, quod poſſint percipi, & non percipi, quod in idea corporum neceſſario non involvantur, quemadmodum involvi extenſionem manifeſtum eſt.

Obſervandum eſt tamen ideam extenſionis non ita pendere ab idea, & ratione corporis, ut cum ſine extenſione concipere nequeamus corpus, nequeamus etiam extenſionem concipere ſine corpore. Extenſionis hujus, in qua ſcribo, adhuc eadem idea remanet, ſive aerem ſuis parietibus intercludat cubiculum, ſive intactis parietibus extrahatur aer, aut mente quomodolibet removeatur: & plane mirari ſubit hanc adeo nitidam extenſionis ſimplicis ideam aliis Philoſophis, Leibnitianis potiſſimum, Carteſianiſque, confuſam adeo, implexamque viſam eſſe. Leibnitiani cum nullam pe-

nitus sufficientem rationem animadverterent, qua spatium vacuum relinqueretur, sine quo motus cælestium corporum, ac terrestrium deficere necesse esset, dixerunt vacuum nulla penitus naturæ facultate induci posse. Cartesiani, ut repugnantiam vacui defenderent, ad ineptias usque delapsi sunt. Fuerunt enim qui assererent spatium vacuum, quod dividi in partes, quod circumscribi, penetrari, & metiri potest, aut corpus, aut spiritum, aut nihil esse, & sublato intermedio aere putarent nihil amplius interjacere extremis parietibus cubiculi, & in suis adhuc locis permanentes parietes, distantia evanescente, se mutuo tangere. At quis non videt eductione aeris parietes, & distantiam parietum non affici? Nam licet nullum corpus intermedium relinquatur, potest tamen parietibus immotis aliquod, ut antea, esse intermedium, atque ad contactum duorum corporum requiritur ut nullum sit corpus intermedium, & ut manente corporum loco, nullum etiam intermedium esse possit. Ita unius anguli latera in summo vertice se tangunt, non quia nulla ibi magnitudo interponitur, sed insuper quia nulla, salvo laterum loco, interponi potest.

Datur igitur reale spatium, sive locus realiter a corporibus distinctus, qui plane locus relinqueretur si corpora omnia, aut tollerentur mente, aut ad nihilum reducerentur. Occupatur hoc spatium a corporibus, non quatenus duæ inter se distinctæ extensiones corporum, & spatii in extensionem unicam coalescant, quod Cartesiani nonnulli absurdum ex principiis antecedentibus dixerunt sequi, sed quatenus eadem, & communis tum corporum, cum spatii distinctio sit. Distinguitur spatium a corporibus eo potissimum discrimine, quod cum corpus in loco quolibet recipi, & collocari possit, in loco, in quo unum corpus est, aliud corpus collocari omnino non possit. Utique veteres scholastici compenetrationem corporum censuerunt divina virtute haberi posse, & quædam, quæ ex Religione accepimus, prodigia, quæque citra ullam compenetrationem a Sannazario, & Poetis aliis, ac veteribus quibusdam Patribus explicabantur, non alia ratione statuerunt fuisse habita, quam corporibus in eadem simul

mul ſpatii portione collocatis. Bælius etiam cum infinitæ divisibilitati, & extenſioni abſolutæ corporum refutandæ operam daret, de more in rebus phyſicis balbutiens timuit, ne ſi quæ duorum corporum partes ſeſe tangentes dividi poſſent in infinitum, deberent ſuis dimenſionibus penetrari: minime vero animadvertit quod cum contactus non partium corporis, ſed ſuperficierum dumtaxat ſit, in infinitæ diviſibilitatis hypotheſi tangi, & uniri poſſunt ſuperficies, quin partes phyſicæ ſuperficiebus iis definitæ penetrentur. Hookius denique, & Hauksbejus cum obſervaſſent aquam communem, & oleum vitriolicum, poſt immixtionem, effervescentiam ſenſibilem, & modicam imminutionem ponderis, minus ſpatium ſimul quam ſeorſim occupare; novum penetrationis corporum principium protulerunt, & pluribus illud phænomenis aptarunt electricitatis, pulveris pyrii &c. Acidas tamen, & fixas olei particulas in libera aquæ interſtitiola prorependo ipſius particulas in minores alias ſecare poſſe, quæ ſibi magis contiguæ ſint, & ſine compenetratione ulla minus volumen fluidi componant, rei Chemicæ periti intelligent. Compenetrationem corporum intrinſecus abſurdam eſſe ex eo facile colligitur, quod ſi unum corpus ab alio penetrari, & in eodem ſimul loco eſſe poſſet, ex duobus corporibus dumtaxat unum conſurgeret, ſive duo corpora & duo ſimul, & unum eſſent.

Ex quo inſuper conſequitur impenetrabilia eſſe corpora natura ſua, non vero accidentali, & extrinſeca vi aliqua, quæ corpus unum ab alio ſegreget. Perperam Lockius exiſtimavit corpus nihil eſſe aliud quam ſpatium penetrabile, in quod divina virtute penetrare reliqua, & ingredi prohiberentur. Lockii ſententiæ affine eſt, quod nuper cenſuit Boſchovichius, impenetrabilitatem ex repulſionis vi oriri, quæ evaneſcente particularum ſeſe invicem evaneſcentium diſtantia ad infinitum uſque augeatur. Patet autem, quod Coſtius in notis Lockii obſervaverat, quibuſcumque viribus accedentibus nunquam ſpatium in corpus natura ſua impenetrabile converſum iri, neque magis vim exteriorem ad veram ſpatii impenetrabilitatem conducere, quam lorica ante pectus

 poſi-

posita efficiat ut pectus ipsum vulnerari amplius non possit. Porro si corpus non est ulla extensionis, quæ impenetrabilis reddatur, portio, sed est aliquid impenetrabile natura sua, quod spatio vacuo accedit, & extra spatium esse nequit; rationem extensionis communem quidem cum spatio habebit corpus, intrinseca vero, & propria impenetrabilitate secernetur a spatio vacuo, & definitione *per genus, & differentiam*, ut præcipiunt Dialectici, comparata appellari poterit *extensio natura sua impenetrabilis*.

Neque ita minus accurate exprimetur corporis essentia, quam exprimatur essentia hominis cum dicitur *animal rationale*. Potius mirari subit quod cum veteres de extensione, & impenetrabilitate diu disputaverint, ambas simul proprietates non composuerint ad definienda corpora, & Gassendus quidem in sola impenetrabilitate, & in sola extensione Cartesius essentiam corporum collocaverit. In quo uter magis erraverit nequeo dicere quamvis errasse utrumque certum sit: impenetrabilitas enim sine prævia extensione nequit intelligi, & extensio non solum corpori, sed etiam spatio vacuo convenit: essentia vero est forma rei, qua intrinsecus res ipsa constituitur, qua scilicet posita habetur res, & sublata aufertur. Ita impenetrabilitati, atque extensioni singillatim sumptæ deficient conditiones aliquæ, quæ ad indicandam essentiam corporis requiri debent, ut scilicet conveniat omni, & soli corpori, & reliquarum omnium proprietatum origo sit. Jam vero quodcumque corpus, nec nisi corpus sibi habet propriam extensionem impenetrabilem, ut antea diximus. Hoc ipso etiam quod corpus occupat spatium, & est indifferens natura sua ut hanc potius quam illam occupat spatii portionem, de una in alteram transferri potest, scilicet est mobile. Quibus denique proprietatibus generale mobilitatis principium acceptum habet, aptum efficitur peculiaribus aliis motibus excipiendis, qui ex viribus extrinsecis quomodocumque oriri possunt, ex gravitate, elasticitate, electricitate &c.

Hæ vero, & aliæ vires hujusmodi, quæ extrinsecus corpori advenire, & in corpora possunt recipi, neque ex impenetrabilitate, & extensione corporis necessario profici-

scun-

ſcuntur, neque cum extenſione impenetrabili neceſſario connexæ ſunt, adeoque eſſentia corporis ſatis definitur impenetrabili ipſa extenſione, & aptitudine aliarum virium extrinſecus recipiendarum, non autem viribus ullis intrinſecis, motibus, facultatibus, & principiis agendi. In primis enim extenſio impenetrabilis ex proprio conceptu exigit continuitatem aliquam partium, non peculiarem aliquam vim, quæ partes uniat, ac vetet dividi, & ſeparari: exigit aliquo in loco eſſe, & poſſe quidem de uno in alium locum tranferri, non autem de uno in alium locum transferri oportere ex gravitate, attractione &c: nullam denique neceſſariam connexionem habet cum principio aliquo agendi, quod ex ipſa quaſi eruatur, ſicuti ex idea trianguli ex. gr. reliquæ omnes trianguli proprietates deduci poſſunt. Deinde poſſumus corpus concipere, quod ad dexteram, & non ad ſiniſtram, aut ad ſiniſtram, & non ad dexteram moveatur: quod attrahatur, & cohæreat cum dexteriore corpore, & non cum ſiniſteriore, aut cum ſiniſteriore tantum, & non dexteriore: quod gravitet in Terram tantum, & non in Lunam, aut in Lunam tantum, & non in Terram &c; adeoque poſſumus corpus concipere, quod neque ad dexteram, neque ad ſiniſtram moveatur, quod neque ex altero latere attrahatur, & cohereat, neque in Terram, neque in Lunam ſit grave &c, hoc eſt quod nullum habeat motum, attractionem, cohærentiam, gravitatem &c. Denique adhuc nitidam ejuſdem corporis ideam habemus, quantumcumque demum a Terra, & Sole diſtare corpus, & gravitatem minui intelligamus, velocitatemque ex gravitate, attractione, impulſu quolibet prognatam quomodocumque magnam, aut parvam eſſe.

Porro ſi gravitas, ſi vix motrix, ſi principium agendi aliquod eſſentiale eſſet corporibus, si non minus extensione impenetrabili, quam motu, & viribus quibuſcumque inditis eſſentia corporum conſtitueretur, non eadem plane haberetur idea corporum, levium, gravium, fluidorum, ſolidorumque, quieſcentium, & motorum: & quemadmodum sine extensione, aut impenetrabilitate concipi non poſſunt corpora, ita ſublata motus, gravitatis, & virium aliarum idea,

nul-

nulla amplius idea corporum supereſſet. Exemplis veritatem manifeſtiſſimam illuſtremus. Quia tres proprietates ad circuli eſſentiam ſimul pertinent, ut ſit primo figura plana, deinde ut lineæ unius circuitu complectatur, ac denique ut rectæ omnes ab aliquo interno puncto ad illam ductæ æquales ſint; una aut altera ex tribus proprietatibus deficientibus, neque eſſe, neque ullo modo concipi poteſt circulus. Contra quia pari modo concipitur triangulum, ſive æqualia, ſive inæqualia inter ſe latera, & anguli intelligantur, ad eſſentiam trianguli non pertinent æqualitas, vel inæqualitas laterum, & angulorum. Et plane una omnium eſſentialium proprietatum ratio eſt. Eſſentiales proprietates ſunt, quæ eſſentiam rei, ſive formam rei intrinſecam conſtituunt. Quare ſi plures ſimul proprietates eſſentiales intrinſecus conſtituant rem aliquam, ſine aliqua proprietatum ſingularum idea concipi, & intelligi res omnino non poterit: & ſi corpora pari modo intelliguntur ſine motu, ac vi motrice, gravitate, attractione &c, certiſſimo argumento eſt attractionem, gravitatem, motricem vim eſſentialem corporibus non eſſe, nimirum corpora ex ſe inertia, & otioſa eſſe, & principio quocumque agendi penitus deſtituta.

Ex his principiis cum plura corollaria graviſſima deduci poſſint, tum præcipue colligitur Newtonum, Coteſium, alioſque Newtonianos deceptos eſſe dum ille quidem impenetrabilitatem corporum non ratione, ſed ſenſu agnoſci exiſtimavit, hi vero gravitatem non minus eſſentialem eſſe corporibus pronuntiarunt, quam ſit impenetrabilitas, & extenſio. Imprimis enim impetrabilia eſſe omnia corpora non inde ſolum eruimus, quod ſingula, quæ tractamus, impenetrabilia deprehendimus, ſed ex eo quod repugnare intrinſecus agnoſcimus penetrationem duorum corporum, & unius veluti ex duobus compoſitionem. Deinde ex eo quod gravitas, attractio &c ſint generales cæleſtium corporum, ac terreſtrium proprietates, non niſi malo vocabulorum abuſu, & confuſione inferri poteſt eſſe etiam proprietates eſſentiales. Si corpora omnia eſſent coloris rubri, aut ſphæricæ figuræ, aut magnitudinis bipedalis, univerſales corporum proprietates

tes essent bipedalis magnitudo, figura sphærica color, ruber: neque tamen proprietates idcirco ejusdem ordinis cum extensione impenetrabili censendæ essent. Sine idea impenetrabilitatis, extensionisque idea corporis nulla est, & nihil plane corporis concipimus dum concipimus aliquid penetrabile, aut inextensum. Contra adhuc nitidam ideam corporis habemus dum aliquid impenetrabile, & extensum concipimus, quod non gravitet, non attrahat, non moveatur. Motus igitur, attractio, gravitas, & quæ aliæ vires in corporibus universi hujus omnibus, instituto experimento, atque observatione, deprehenduntur, sunt proprietates accidentales corporum adiectæ extrinsecus, & quæ servata semper essentia corporum esse, & abesse possunt: ipsa autem corpora essentialiter inertia, otiosa, & principio quocumque agendi destituta esse debent.

Ita notione corporum diligentius evoluta ens necessarium, immutabile, æternum, ac perfectissimum existere breviter conficitur. Quod enim natura sua iners est, quod omni principio agendi destituitur, quod motus & vires omnes extrinsecus acceptas habet, sibi profecto sufficiens ratio, & caussa esse non potuit cur esset, nec, si fuit aliquando, se certo ordine distribuere, & tot motibus impellere undique, & agitare potuit, nec jam conceptos motus, ac vires tantis vicissitudinibus temperare. Extra omnem igitur corporum collectionem sufficiens ratio, & caussa aliqua existentiæ, motus, & virium corporum quæri debet. Porro in toto incorporearum caussarum genere, aut caussa una a se est, & in se sufficientem rationem complectitur sui ipsius, & aliarum rerum omnium: aut singulæ ita invicem connexæ sunt, ut unaquæque pendeat ex alia, & principium ex alia ducat. Postremum hoc si esse posset, in continuata quavis caussarum incorporearum, & a se invicem pendentium serie, decem, centum, & omnes etiam caussæ hujusmodi, hoc est totum caussarum genus nec suæ existentiæ, nec existentiæ, motuum, & virium corporum sufficientem rationem in se ipso complecteretur: cum valeat in essentialibus progressio a partibus ad totum. Igitur caussa aliqua incorporea debet esse, a qua cum pendeant reliquæ caussæ omnes, ipsa a nulla alia

pen-

pendeat, & ex se, & necessitate naturæ suæ existat, nec ullo unquam tempore potuerit non existere: & quia quod in se necessarium, æternumque est, vicissitudinis alicujus, & mutationis caussa sibi met ipsi intrinsecus esse nequit, & cum a nullo alio principio pendeat nullam extrinsecus mutationis caussam habere potest; incorporea, necessaria, & æterna eadem caussa penitus etiam immutabilis sit oportet.

Insuper quæ necessaria, & immutabilis caussa est, non potest plus esse quam vere est: sive est illud omne quod potest esse. Quidquid enim non est omne illud, quod potest esse, potest plus esse quam vere est: & quidquid potest plus esse, mutari potest. Jam vero si familiari perfectionis vocabulo realem aliquam significationem velimus assignare, dici debet perfectum id quod est, & perfectius id quod est magis, majorem scilicet proprietatum numerum, extensionemque in se complectitur. Huc etiam redit Genuensis definitio dum statuit rem aliquam perfectam esse, aut attributorum numero, & præstantia, aut unitate, & simplicitate, aut quod fini suo apta sit, & quod ideæ suæ respondeat. Caussa igitur quæ majorem amplitudinem existendi habet, quæ proprietates omnes in se complectitur, quas habere potest, est undique perfectissima. Rursus quæ perfectissima caussa est, multiplex esse nequit. Nam si esset multiplex, uni caussæ deficerent alterius perfectiones, & unaquaque perfectius aliquid esse posset. Præterea aut unaquæque rationem sufficientem existentiæ rerum omnium in se haberet, atque ita plures superfluæ essent: aut neutra haberet, & neutra esset suprema caussa: aut haberet alterutra, & ea dumtaxat suprema caussa appellari posset. Quæ igitur immutabilis, & perfectissima caussa est, non nisi unica debet esse.

Debet etiam in se complecti quidquid ad suæ perfectionis, felicitatisque incrementum pertinet, beatissima, in se optima, aliis maxime benefica, immensa, & infinita. Primo enim quo modo ex divinæ naturæ perfectione absoluta Dei bonitas colligitur, ex absoluta bonitate quæ relativa est, & quam continua beneficiorum serie experimur, omnino profluit, ut fert veterum Platonicorum effatum, ***bonum sui diffusi-***

fusivum esse, & *summum summe*. Deinde si limitem, terminum, finem aliquem pateretur suprema caussa, si non esset infinita quoque & immensa, non esset illud omne, quod potest esse, sive & plus esse, & mutari posset. Et quia caussa incorporea nec spatium occupat, nec extensione aliqua metitur, non nisi actione, & virtute sua cuicumque actioni, & cuicumque loco præsens erit: id quod Cudworthus, Clarkius, Henricus Morus, aliique authores cum improbarent, statuerentque supremam caussam substantia sua diffundi ubique, & immensitatem consistere *in indistantia a rebus*, & *locis singulis*; statuere visi sunt ipsam spatii vacui, & infiniti substantiam Deum esse. Antonius Genuensis eamdem opinionem Newtoni tribuit. Is vero cum docuisset Deum existendo semper, & ubique durationem, spatium, æternitatem, & infinitum constituere, se hæc omnia non ita accipere quatenus Deus sit ipsum spatium indicavit satis ubi ait: *non est æternitas*, & *infinitas*, *sed æternus*, & *infinitus*: *non est duratio*, & *spatium*, *sed durat*, & *adest*. Et plane aut nihil aliud est spatium vacuum, quam mera negatio corporis, & ad divinam, & perfectissimam essentiam pertinere nequaquam poterit: aut si mera negatio corporis esse nequit quod sublatis corporibus remaneret, quod satis sine ullo corpore concipitur, quod ex distinctis partibus coalescit, si spatium vacuum cum Hartsoekerio, Gassendo, Musschenbroekio, aliisque autoribus censeatur positivum, & reale aliquid; concedendum etiam erit quod fuerit a Deo conditum; quod possit aliquando destrui, quod finem, ac limitem non excludat natura sua, atque ita nullus amplius tritis quæstiunculis de immensitate, & duratione spatii locus superit.

Insuper quæ perfectissima, & suprema caussa est, in se ipsa complecti debet sufficientem rationem singularum rerum, quæ sunt, aut fuerunt, aut erunt aliquando, aut possunt esse, in se ipsa videlicet debet complecti ideas archetypas, sive exemplaria præsentium rerum, præteritarumque, ac futurarum, & possibilium, atque in se res omnes intelligere. Falsum est ergo quod opinabantur olim Platonici de æternis

exemplaribus extra Deum exiſtentibus, & jure merito recentiores Platonici ab ea ſententia, quæ Dei naturæ adeo repugnans eſt, deſciverunt, nec archetypas ideas diſtinxerunt a divina ſubſtantia, ut apud Plotinum, & Auguſtinum videre eſt. Quia vero naturæ neceſſariæ, & immutabili nihil variabile miſceri poteſt, immutabilis etiam erit cognitio, & ſcientia primæ cauſſæ, & in tantis mundanarum rerum viciſſitudinibus res ſingulas, & rerum ſingularum ſucceſſiones, combinationeſque, hoc eſt mutabilia omnia intelliget immutabiliter. Et quia in cauſſa incorporea, & ſimpliciſſima nulla partium compoſitio, & diſtinctio poteſt eſſe, ſequitur cauſſam ipſam in ſe ſimul intelligere, & videre omnia eodem tempore, & ſine ulla aut futuri, aut præteriti diverſitate. Falſum eſt igitur cognitiones divinas alias aliis priores, aut poſteriores eſſe, & probe cavendum eſt ne humanarum cognitionum indolem cognitioni divinæ adjudicemus.

Pariter cum a nullo exteriore principio pendeat ſuprema cauſſa, nec niſi a ſe ipſa ſit, non poterit impelli extrinſecus, & ad agendum determinari. Intrinſecus etiam ex ſuæ naturæ neceſſitate determinari non poterit ad hoc vel illud extra ſe agendum, adeoque intrinſecus, & extrinſecus erit libera. Primo enim tota Dei natura in ſe eſt, nec neceſſario ferri debet niſi in ſe ipſam: deinde quæ exteriores res neceſſario cum divina natura connecterentur, neceſſariæ eſſent, æternæ, perfectiſſimæ, communemque haberent cum prima, & ſuprema cauſſa rationem exiſtendi, nec de una in aliam formam tranſire, & novis accidentibus paſſim affici, & novas modificationes adipiſci poſſent. Quare cum modificationes ſubſtantiæ Dei appellavit Spinoſa res omnes hujus Univerſi, & fieri voluit neceſſitate naturæ Dei, & ſolis divinæ naturæ legibus, non minus erravit ipſe, quam cum humanos affectus omnes triſtitiam, metum, furorem, deſperationem in una beatiſſima, atque optima Dei ſubſtantia accumulavit, aut cum unicam eſſe voluit Univerſi ſubſtantiam quæ extenſa eſt, adeoque ex infinitis partibus extenſis, in infinitum ſemper diviſibilibus, & inter ſe diſtinctis coaleſcit. Quod ſi vero Deus intrinſecus, & extrinſecus liber eſt, aliud

pari-

pariter ex jam dictis consequetur, Deum videlicet non agere nisi quia vult, & divinam voluntatem sibi met ipsi sufficientem rationem agendi esse. Mihi libertatem omnem divinam sustulisse Leibnitiani Philosophi visi sunt, dum nihil Deum posse agere censuerunt, nisi sufficientem rationem in rebus, in quibus agit, inveniat. Quod si amplius non est quærenda exterior ratio, propter quam agat; nulla erit similium partium repugnantia, mundus hic noster necessario non erit omnium possibilium optimus, atque alia Leibnitianæ Philosophiæ capita omnino corruent.

Denique suprema, & infinita caussa erit omnipotens, & infinite plura, & majora poterit efficere, quam nos possimus intellectu assequi. Inde autem consequetur denuo incomprehensibilitatem rei alicujus non esse sufficientem rationem rei negandæ, & illæ omnes difficultates evanescent, quæ hacce in re afferri solent, & quas in suo Dictionario Historico Bælius perstrinxerat articulo Simonidis: quod scilicet non percipiamus quomodo existat aliquid, quod nulla spatii portione definiatur: quomodo cum Deus ob spiritualitatem suam sit nullibi, ratione immensitatis sit ubique: cum sit necessarius, & immutabilis sit etiam liber &c. Prior autem omnipotentiæ notio sic accipienda erit, ut cum Deus possit efficere ea omnia, quæ possunt fieri, cætera, quæ repugnantiam, & contradictionem intimam involvunt, efficere omnino non possit. Ita non poterit ens aliquod producere, quod cum a se ipso non sit, simul sit perfectissimum, & optimum, aut creaturas liberas simul, & indefectibiles constituere, aut mala creaturarum omnium impedire. Neque etiam poterit essentiam rei cujuspiam immutare, manente eadem re. Ita enim simul res esset, & non esset: esset nimirum ex data hypothesi, & non esset ob essentiæ defectum. Cum nullus igitur divinæ omnipotentiæ terminus, ac limes sit, hæc perfectio, & complementum veluti omnipotentiæ divinæ erit, ut neque Deus sibi met ipsi contradicere, neque rerum essentias mutare possit, neque inertiam naturalem, otiositatemque corporum ita adimere, ut ex se corpora, & sublata exteriore caussa moveantur, aut dum motum extrinsecus recipiunt,

alio ipfum dirigant, augeant, imminuant. Erit etiam impoffibile ut corpora velint, cogitent, intelligant. Id vero intererit motum inter, cogitationemque, quod cum corpus moveri poffit exteriore aliqua vi, cogitare omnino non poffit. Quia enim nihil aliud eft cogitare, quam rerum ideas in fe producere, feparare, conjungere, alias ex aliis derivare, revocare jam habitas &c; fine intrinfeco aliquo agendi principio cogitatio effe non poffet, & femper agerent corpora cum cogitarent. Contra dum exteriore vi transferuntur de loco in locum, & motum impreffum conftanter retinent, nec quidpiam de fuo adjiciunt; paffive femper fe habent.

Perperam Lockius ex eo quod cognitiones univerfim fumptæ magis limitatæ fint, quam fint ideæ, collegit minime a nobis dignofci poffe utrum materies cogitationis particeps poffit evadere, nec ne. Aliud quippe eft quod non femper ad eas res pertingat cognitio, ad quas ufque extenduntur ideæ: aliud quod nunquam extendi eoufque poffint. Primum dum Lockio concedimus, non fequitur etiam alterum verum effe. Quot enim & ideas fimul, & cognitiones habemus earumdem rerum? Habemus ideam quadrati, ideam fegmenti Parabolici, & ideam ejus, quod indicatur vocabulo æqualitatis, & fcimus infuper quadratum effe fegmento Parabolico æquale: habemus ideam circuli, & ideam quadrati circulo infcripti, aut circumfcripti, & fcimus circulum non effe quadrato infcripto, aut circumfcripto æqualem. Pariter ideæ corporis ideam inertiæ neceffario connexam effe intelligimus, & fcimus cogitandi vi inertiam adverfari, adeoque fimul copulari inertiam, cogitationemque nequaquam poffe. Neque eft quod ad tenebras noftræ ignorantiæ confugiat Lockius, & ex quo plura alia non cognofcamus, inferat minime a nobis cognofci poffe utrum materies cogitationis particeps poffit evadere nec ne. Hæc mihi argumentandi ratio femper alteri fimilis vifa eft, qua ex quo circulus rectificari, & quadrari nequit, inferret quifpiam nec Parabolam Apollonianam quadrari poffe, nec quam vocant Nælianam, & cubicam rectificari. Sed tamen audiamus Lockium. Ait nobis æque incompertum effe quomodo materies

cogi-

cogitet, & quomodo exiſtant ſpiritus, & ſpiritus conjungantur materiæ, & materia agat in ſpiritum, & vice verſa: tum ſubdit ſpiritus exiſtere, & corporibus copulari, & agi, & agere in corpora: ac denique concludit nullam eſſe potiorem rationem, qua materiæ cogitantis poſſibilitatem, aut exiſtentiam inficiemur. Hoc *cap.* 4. *lib.* 3. argumentum propoſuit, & occaſione diſputationis in Anglia exortæ Stillingfleeſtio rurſus objecit. At vero non ſolum minime percipimus quanam ratione cogitare poſſit materies, ſed manifeſtam contradictionem deprehendimus materiam inertem, otioſamque inter, & vim, facultatemque cogitandi. Aliis Lockii ſcrupulis Stillingfleſtius videtur ſatisfeciſſe. Nos hæc, quæ ex noſtris principiis conſequebantur, noluimus præterire.

INDEX

INDEX
TOTIUS OPERIS
TOMI PRIMI.

De

De

I N D E X

TOMI SECUNDI.

vis

De

De

ERRA-

Pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
21.	3.	$315 b^2 x$	$315 b^2 x^3$.
38.	2.	$= w \pi$	$- w \pi$.
	17.	$v z$	$v Z$.
49.	2.	coſinus	ſinus .
65.	6.	$b a^3$	$4 b a^3$.
74.	15.	$- + 15$	± 15.
84.	5.	$\pm \varpi u$	$+ \varpi u$.
89.	23.	accelerari	retardari .
110.	27.	$\mp b. - \mp b$	$\pm b$.
112.	6.	$+ b$	$+ b$.
146.	16.	fumenda	ſumenda .
153.	17.	non ſuperet . . . . . . , . .	non ſuperet, & primam habeat extra ſignum .
162.	17.	detegerit	detegeret .
165.	14.	paremetri	parametri .
168.	12.	*a* communi	a communi .
180.	13.	$s e$	$s c$.
184.	21.	iſuperimetricis	iſoperimetricis .
185.	2.	natuæ	naturæ .
190.	3.	$= \frac{x dy}{ds}$	$+ \frac{x d y}{d s}$.
200.	16.	amiſerit	amiſerint .
201.	2.	Anglicæ	Anglice .

Fig. 1

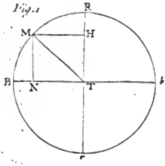


Fig. 2

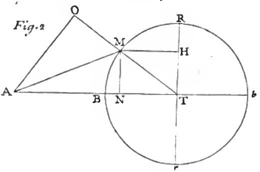


Fig. 3

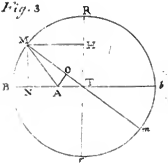


Fig. 4

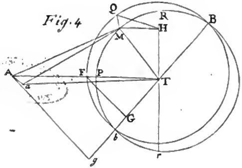


Fig. 5

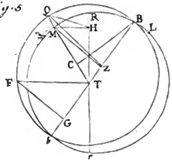
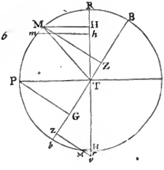


Fig. 6



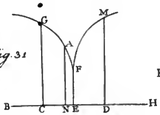


Fig. 31

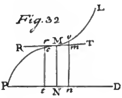


Fig. 32

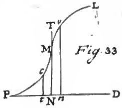


Fig. 33

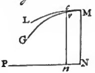


Fig. 34

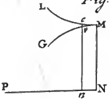


Fig. 35

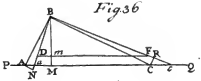


Fig. 36

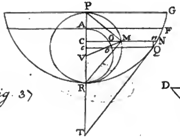


Fig. 37

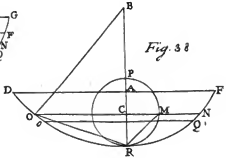


Fig. 38

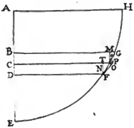


Fig. 39

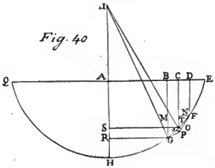


Fig. 40

Fig. 7

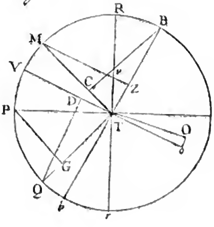


Fig. 8

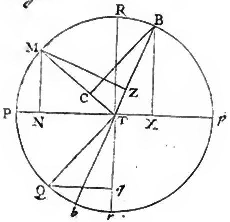


Fig. 9

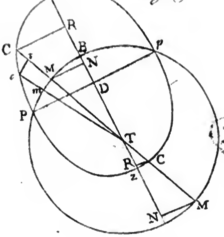


Fig. 10

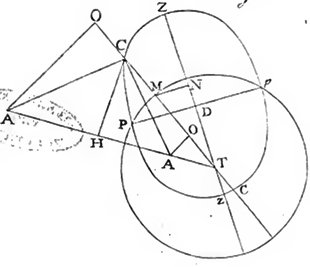


Fig. 11

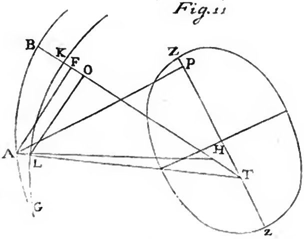


Fig. 12

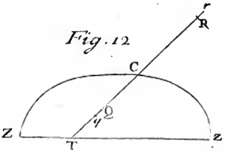


Fig. 13

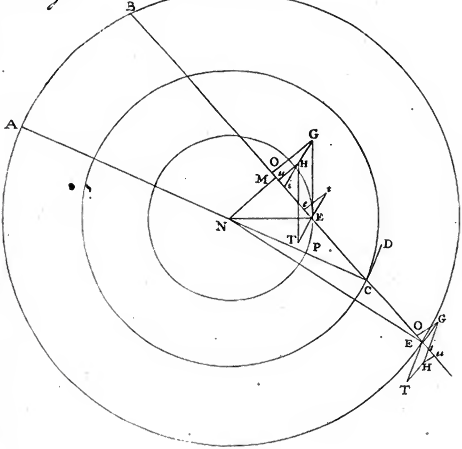


Fig. 14

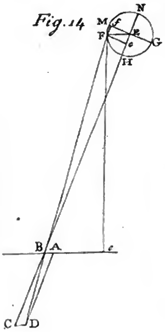


Fig. 15

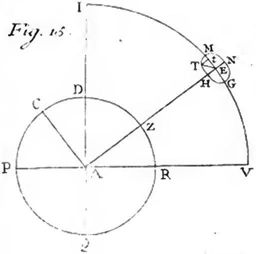


Fig. 16

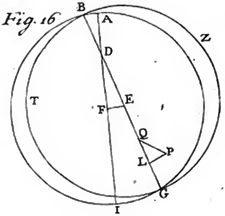
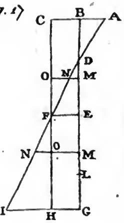
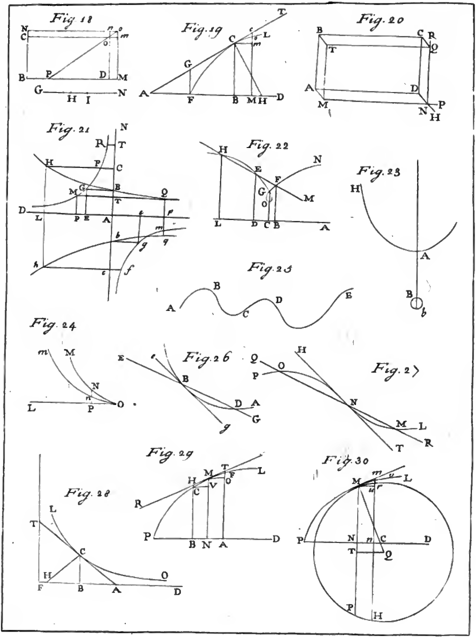


Fig. 17




Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30